PFREUNDSCHUH
in Heidelberg

GERHARD PFREUNDSCHUH

Mathe in der Würfelwelt

anschaulich und begreifbar

www.pfreundschuh-heidelberg.de

Heidelberg 2015

https://www.pfreundschuh-heidelberg.de/downloads/soziale-volkswirtschaft/Mathe-in-der-Wuerfelwelt-2015_Langfassung.pdf

Gerhard Pfreundschuh

Mathe in der Würfelwelt

anschaulich und begreifbar

Heidelberg 2015

Einleitung

„Mathe in der Würfelwelt“ richtet sich vor allem an Schüler, aber auch an Lehrer und Eltern. Ziel ist, dass alle Jugendlichen die Mittlere Reife schaffen. Das ist heute die Voraussetzung für die meisten Ausbildungsberufe. Unser Bürgerstaat will „Mittelstand für alle“. Das bedeutet, alle brauchen einen Berufsabschluss und davor eben die Mittlere Reife. Das gilt unabhängig davon, ob sie danach die Oberstufe (Sekundarstufe II) mit einer Lehre oder dem Abi abschließen. Alles Schritt für Schritt! Dabei gibt es heute einen „dualen Weg“ von der Mittleren Reife bis zum Hochschulabschluss. In der Schweiz schließen derzeit 92 %, demnächst 95 % der Jugendlichen die Sekundarstufe II erfolgreich ab (Schweizer Bildungsbericht 2014). In Finnland und Taiwan schaffen 90% die Studierfähigkeit. Bei uns haben 26,6 % nicht einmal einen Berufsabschluss (Zensus 2013).

In der Mittelschule (Sekundarstufe I) müssen die Fächer Deutsch, Englisch und Mathematik als die Kernfächer auf einem praxis- und prüfungstauglichen Niveau erlernt und beherrscht werden. Mathe ist für viele dabei das Angstfach. Das ist nicht nötig. Mathe-Schwerpunkte sind in der Mittelstufe zunächst „Dreisatz, Prozente und Zinsen“, also Anwendungen der vier Grundrechenarten. Dann folgen die drei höheren Rechenarten „Potenzen, Wurzeln und Logarithmen“. Dabei kommt es oft zu Verständnisschwierigkeiten, weil diese Zahlenwelt (Arithmetik) nicht greifbar und anschaulich dargestellt wird. Das ändern wir und zeigen, dass wir uns mit Würfeln die drei höheren Rechenarten veranschaulichen und – mit Händen – begreifbar machen können.

Zu Beginn meines Wirtschaftsstudiums an der Uni Mannheim musste ich mich als fertiger Jurist noch einmal mit Mathe beschäftigen – vom Zählen bis zum Differenzieren und Integrieren. Ich ging ganz unbekümmert an die Sache ran und fand einen Weg, der die Zahlenwelt (Arithmetik) mit Würfeln vorstellt. Dazu ist ab der vierten Dimension die Zeit einzuführen. Wir haben damit einen anschaulichen Raum-Zeit-Körper. Das will ich hier zeigen

An Hochschulen wurde festgestellt, dass eine praxisbezogene Lehre auch in Mathe den Zuspruch enorm steigert. Eine Informatik-Professorin aus Wien berichtet über eine andere Vorgehensweise beim Studium. Es wurde zunächst gefragt: „Welche Alltagsprobleme lösen wir eigentlich mit technischen Mitteln und technischen Instrumenten?“ Durch diese gewandelte Sichtweise ist es gelungen, den Frauenanteil unter den Studenten nachhaltig auf jetzt 42 % zu steigern. Ursprünglich lag er bei 7 %.[1].Das ist kein Einzelfall.

Daher machen wir miteinander ein Experiment. Dabei geht es nicht um Wissenschaft, sondern um Weltverständnis, also Bildung im ursprünglichen Sinn. Wir wagen eine Blick ins Weltall und veranschaulichen uns das mit unserer Würfelwelt. Ihr seid aufgerufen zu prüfen, ob ihr euch dadurch die Erkenntnisse von Einstein und Planck über Raum und Zeit sowie ein sich immer schneller ausdehnendes Weltall bildlich vorstellen könnt. Die ersten Entdeckungsreisen gingen über die Weltmeere, dann in unser Sonnensystem. Heute wird das Weltall, der ganze Kosmos erforscht. Das ist spannend. Wir sollten uns zumindest bildungsmäßig vorstellen können, worum es geht.

Viel Spaß mit „Mathe in der Würfelwelt“

Heidelberg, im Juni 2015

[1] VDI (= Verein Deutscher Ingenieure)-Nachrichten, 21.02.2014

Betreff: Re: Dimensionen (fwd)
Von: "Georg Schumacher" <schumac@Mathematik.Uni-Marburg.de>
An: <PfreundschuhG@t-online.de>
Kopie: "Mammitzsch" <mammit@Mathematik.Uni-Marburg.de>
Datum: 12. Jan 2005 11:30

Sehr geehrter Herr Dr. Pfreundschuh,

soeben erhielt ich Ihr Manuskript vom Dekan unseres Fachbereichs.

Ihr Interesse an Grundlagen der Mathematik freut uns sehr. Ihr Manuskript ist ein interessanter Beitrag zur grafischen Darstellung der Raum-Zeit-Dimension.

Ihre arithmetischen Diskussionen stehen zunächst in Zusammenhang mit dem Aufbau des Zahlensystems, ausgehend von den natürlichen Zahlen. Sodann führen Sie auf einem geometrischen Wege neue Grundrechenarten ein. Hier sei bemerkt, dass man im Sinne der modernen Algebra, die vier Grundrechenarten zunächst auf zwei Verknüpfungen reduziert hat, und Subtraktion bzw. Division zurückgeführt hat auf die Existenz inverser Elemente bezüglich der Addition und Multiplikation. Dies ist geschehen mit dem Ziel, eher in abstraktere Richtungen zu gehen.

In Ihrem Ansatz wird benutzt, dass die Multiplikation natürlicher Zahlen auf die wiederholte Addition zurückgeführt wird, und so auch in natürlicher Weise die Exponentialabbildung, oder besser das Potenzieren begründet. An dieser Stelle kann man auch bemerken, dass dieser Prozess sich weiterführen und wiederholen lässt. Vielleicht besteht hier ein gewisser Zusammenhang mit Ihrem geometrischen Ansatz.

Neben der Visualisierung der Zeit-Dimension beziehen Sie sich auch auf Fragen der Theoretischen Physik.

Ihr Artikel ist ein interessanter Beitrag zur grafischen Darstellung der Raum-Zeit-Dimension.

Mit freundlichen Grüssen

Georg Schumacher

Prof. Dr. Georg Schumacher
Fachbereich Mathematik
der Philipps-Universitaet
Hans-Meerwein-Strasse
Lahnberge
D-35032 Marburg

Tel.: ++49(0)6421 28 25497 (25496) office 28 25959 FAX

web: www.mathematik.uni-marburg.de/~schumac
e-mail: schumac@mathematik.uni-marburg.de

Inhalt

1 Unser Weg zur Mathe

„Bildung“ heißt, die Welt verstehen. Und die ursprünglichste Form von „Erkenntnis und Verständnis“ ist etwas begreifen und erfassen, also mit den Händen anpacken. Daher werden wir uns alles mit Würfeln vor Augen führen und veranschaulichen. Gerade bei Mathe geht die Erkenntnis am besten über unsere Hand und ihre zehn Finger.

Heute will alle Welt alles „komplex“ und „kompliziert“; beides heißt auf Deutsch „verwickelt“. Wir müssen solange denken, bis wir die Knäuel entwirrt haben. Dann können wir unsere Gedankengänge einfach und anschaulich ‚ent‘-wickeln. Einige Geistesgrößen von früher sahen das auch so, Albert Einstein u.a. gehörten dazu.

Inzwischen fordern auch Professorinnen einen neuen, anschaulichen Zugang zu den MINT-Fächern [= Mathe, Informatik, Naturwissenschaft, Technik]. Wo das umgesetzt wurde, waren die Erfolge beachtlich. So stieg der Frauenanteil an einer Technischen Hochschule von 7 % auf 42 %.[2] An anderen Technischen Unis und FH werden die Studenten mit Mathe „knallhart raus geprüft“ – bis zu 70 %.[3] Doch unser künftiger Wohlstand hängt davon ab, dass wir genug MINT-Leute haben, die Erfindungen und Neuerungen hervorbringen, die gebraucht und gekauft werden, mit denen Geld zu verdienen ist. Eine „Techniklücke“ führt zu Arbeitslosigkeit und Armut.[4]

[2] VDI- [Verein Deutscher Ingenieure] Nachrichten, 21.02.2014
[3] Die Zeit, 27.01.2011
[4] http://der-buergerstaat.de/blog/2015/05/02/geld-oder-globalsteuerung-fehlsteuerung/

1.1 In der Praxis hat nur das Einfache Erfolg

Der Leitspruch „In der Praxis hat nur das Einfache Erfolg“ gehört zu meinen Lebenserfahrungen. Da unsere schein-wissenschaftliche Welt genau das Gegenteil behauptet, will ich mir Beistand holen.

Albert Einstein (1879 – 1955) urteilt in einem Brief über einen Kollegen: „Er hat wenig Gefühl dafür, dass eine theoretische Konstruktion kaum Aussicht auf Wahrheit hat, wenn sie nicht logisch sehr einfach ist.“[5] Der angesehene US-Physiker und Mathematiker Brian Greene (geb. 1963) zitiert Ernest Rutherford (1871 – 1937): „Der Physiker Rutherford hat einmal sinngemäß gesagt, wenn man ein Ergebnis nicht in einfachen, nichtwissenschaftlichen Worten erklären könne, dann habe man es nicht wirklich verstanden. Er hat damit nicht gemeint, dass das Ergebnis falsch sei, sondern man habe seinen Ursprung, seine Bedeutung oder seine Konsequenzen nicht richtig begriffen.“[6] Rutherford war Nobelpreisträger und einer der bedeutendsten Experimentalphysiker.

Greene wird uns später im Abschnitt „Vom Würfel zum Weltall“ häufiger begegnen. Er wurde mit seinen allgemeinverständlichen Bestsellern „Das elegante Universum“ und „Der Stoff, aus dem der Kosmos ist - Raum, Zeit und die Beschaffenheit der Wirklichkeit“ weltbekannt.[7] Hören wir zum Schluss noch den amerikanischen Philosophen und Schriftsteller Ralph Waldo Emerson (1803 – 1882), der wegen seiner treffenden Sprüche öfter zitiert wird: „Es ist ein Beweis hoher Bildung, die größten Dinge auf die einfachste Art zu sagen.“

Nach diesen alten und ehrwürdigen Herren wollen uns jungen, heutigen Professorinnen zuwenden. In den Nachrichten des VDI [= Verein Deutscher Ingenieure] urteilt die Professorin Tina Seidel von der Technischen Universität München: „Viele Lehrer übersehen fähige Schüler. Es ist die alte Leier: Der Mathematikunterricht erreicht häufig nur wenige Schüler in einer Klasse. Die anderen

---

[5] Albert Einstein an Ilse Rosenthal-Schneider, zitiert nach Barrow, John D., 1 x 1 des Universums – Die Naturkonstanten oder was die Welt zusammenhält, Frankfurt / M. 2004, S. 49 – Der Kollege war Eddington.

[6] zitiert nach Greene, Brian, Das elegante Universum, Superstrings, verborgenen Dimensionen und die Suche nach der Weltformel, Berlin 2002, S. 239

schalten aus Desinteresse ab. Das muss nicht sein, meint Tina Seidel. Die Münchner Unterrichtsforscherin über pubertierende Mathematikschüler, kompetente Mädchen und tatkräftige Lehrer in Ostdeutschland."[8]

Ebenfalls in den VDI-Nachrichten meldete sich eine Informatik-Professorin aus Wien zu Wort. Sie fordert ein neues Technikbild, das auch Frauen anspricht. Und sie schildert, wie es eine Universität richtig gemacht hat: „Die Verantwortlichen haben sich nicht nur gefragt, wie sie andere Menschen für das Studium gewinnen können, sondern ob sie das bisher vorherrschende Technikbild wirklich vermitteln wollen. Als Ergebnis dieses Reflexionsprozesses unterstreicht die Universität heute den starken Anwendungsbezug von Technik. Das ganze Studium wurde umgekrempelt. Jetzt beginnt die akademische Ausbildung mit der Frage: ‚Welche Alltagsprobleme lösen wir eigentlich mit technischen Mitteln und technischen Instrumenten?' Durch dieses gewandelte Selbstverständnis ist es gelungen, den Frauenanteil unter den Studenten nachhaltig auf jetzt 42 % zu steigern." Ursprünglich lag er bei 7 %.[9]

Wie der Anwendungsbezug genau geht, zeigte mir bei Einführung der EDV im Landratsamt unser junger und pfiffiger Kämmerer Peter Korth. Er hatte an einem Nachmittag im Jahr 1981 allen gestandenen, alten und jungen Amtsleitern und mir eine Einführung in die neue Bürotechnik zu geben. Mit Begeisterung sprach er von Bits und Bytes, vom Abschied von Lochkarten und der Einführung von EDV-Rechnern und Textverarbeitung am Arbeitsplatz. Damit es nicht zu lang dauerte, wählte ich für solche Veranstaltungen immer den Freitagnachmittag. Da wollte niemand bis zum Dunkel-werden im Amt sitzen. In der Kürze liegt die Würze!

Danach nahm ich den Peter Korth noch mit auf mein Dienstzimmer. Ich bedankte mich und sagte: „Herr Korth, wir haben jetzt Freitagnachmittag. Sie haben nun bis Montag Zeit, sich etwas einfallen zu lassen. Erklären Sie die neue EDV so einfach, dass unsere Schreibkräfte es verstehen und gern ihre elektrischen Schreibmaschinen gegen Bildschirm und Tastatur austauschen." Der Peter Korth zupfte sich, wie immer in solchen Fällen, an seinem kurzen Bart und meinte: „Eine

---

[7] München 2008
[8] VDI [Verein Deutscher Ingenieure]-Nachrichten, 18.10.2013
[9] VDI-Nachrichten, 21.02.2014

verdammt schwere Aufgabe!“ „Herr Korth, Sie sin‘ g‘scheid, Sie könne‘ des“, sagte ich zum Abschied.

Am Montagmorgen passte mich der Herr Korth schon auf dem Flur ab. Er strahlte und zupfte wieder an seinem Bart: „Ich hab‘s“, sagte er. Freudig nahm ich ihn mit in mein Dienstzimmer; und wir setzten uns entspannt an den Besprechungstisch. „Die EDV ist ganz einfach“, begann er. „Des is genau de‘ richtige Einstieg“, sagte ich freudig. „So ein Computer ist eine ideale Schreibmaschine. Die Schreibkräfte brauchen kein Tipp-Ex mehr. Alles kann auf dem Bildschirm problemlos verbessert und neu ausgedruckt werden. Dann ist die EDV ein großer Karteikasten. In Sekunden kann ich jede Adresse oder sonst was finden, auf meinen Bildschirm holen und in einen Brief einfügen. Schließlich ist der Computer eine ganz komfortable Rechenmaschine. Ich kann z. B. schnell durch die Eingabe von abgefragten Zahlen die Sozialhilfe ausrechnen lassen. Und jetzt kommt noch ein Knüller. Ich kann all diese Fähigkeiten verknüpfen. Die Sachbearbeiterin holt das Muster „Sozialhilfebescheid“ auf den Bildschirm. Sie setzt die Anschrift ein, passt den Text dem Fall an und lässt die Maschine die Sozialhilfezahlung ausrechnen.“ (Inzwischen ist nur noch dazugekommen, dass mein Rechner auch eine Fernmeldezentrale mit weltweitem Internet-Anschluss ist.)

Ich war begeistert: „Erzählen Sie niemand mehr etwas von Bits und Bytes und sonstigen Hexenwörtern. Zeigen Sie allen den Nutzen und wie‘s geht. Sie müssen nun ein Schulungsprogramm aufbauen – vom ganz Einfachen zum Schwierigeren.“ – Das ist der Anwendungsbezug, von dem die Professorin sprach!

Die ganze Republik jammerte damals über die Verweigerungshaltung der Leute gegenüber der EDV. Von großen „Akzeptanzproblemen“ bei der neuen Technik wurde gesprochen und noch mehr geschrieben. Bei uns rissen sich die Leute um die Fortbildung und die neuen Maschinen. Da kam uns noch ein Zufall zu Hilfe. Ein vorlauter, kluger und immer etwas aufsässige Amtsleiter, der deswegen auch lange Personalrat war, schrieb in unserer Hauszeitung „Die Büroklammer“: „Bis auf meinem Bildschirm ein Wort auftaucht, habe ich es schneller in gotischen Lettern auf einen Grabstein gemeißelt.“ Ich lobte ihn wegen des guten Witzes und sagte: „Kää Engschd [keine Angst] Herr Fleißner, Ihr Amt kriegt die neue‘ Geräte als letztes.“

Doch nach einiger Zeit kam er reumütig angeschlichen. Seine Mitarbeiterinnen beschwerten sich immer bitterer. Viele Leute hätten schon neue Maschinen, doch in seinem Amt stünde noch keine einzige. Bei ihm müssten alle noch auf den klapprigen elektrischen Schreibmaschinen herumhacken. Ich dürfe doch seine Leute nicht bestrafen, nur weil er einen guten Witz gemacht habe. Sein Amt wurde dann ins laufende Beschaffungsprogramm aufgenommen.

Jetzt will ich euch noch verraten, wo ich den Grundsatz „In der Praxis hat nur das Einfache Erfolg" zuerst und immer wieder gehört habe. Es war beim Militär. Schon der weltbekannte Stratege und Philosoph Carl Clausewitz sagte in seinem Buch „Vom Kriege" sinngemäß: „Strategie konzentriert sich auf das ganz Wesentliche und Wichtige. Sie ist ganz einfach. Aber gerade deswegen für viele so schwer."[10]

So vorbereitet wollen wir uns zunächst fragen: Was ist Bildung? Viele Bildungsbürger machen daraus ein Mysterium, ein durch Weihrauch vernebeltes, unfassbares Geheimnis. Vor allem verwechseln sie Bildung mit Viel- oder gar Alleswisserei. Doch wer alles weiß, hat noch lange nicht alles verstanden!

1.2 Bildung heißt, die Welt verstehen

Dazu gibt es einen vortrefflichen Ausspruch des großen deutschen Philosophen Arthur Schopenhauer (1788 -1860): „Natürlicher Verstand kann fast jeden Grad von Bildung ersetzen, aber keine Bildung den natürlichen Verstand." Was wollen wir also unter Bildung verstehen? Warum und wofür brauchen wir sie?

Der Mensch hat wie andere hoch entwickelte Lebewesen von Geburt aus einen natürlichen Neugiertrieb. Er will seine Umwelt erleben, entdecken und verstehen. Und **Bildung heißt, den jungen (und den erwachsenen) Menschen helfen, die Welt zu verstehen**. Genau das wollen Kinder. Darum fragen sie den Erwachsenen ‚Löcher in den Bauch'. Philosophieprofessoren haben sogar festgestellt, dass Kinder im Alter zwischen vier und sieben Jahren mit ihren Worten alle Fragen stellen, die

[10] Clausewitz, Carl von, Vom Kriege: hinterlassene Werke, ungekürzte Ausg., Ullstein 1980 S. 150, siehe auch „3 Das Militär", S. 108, 144 ff

Philosophen im Laufe der Jahrhunderte gestellt haben. Die Erwachsenen müssen aber dafür die richtigen Worte und anschauliche, begreifbare Antworten finden!

Nun verdoppelt sich heute alle fünf bis sieben Jahre das weltweite Wissen. Deshalb müssen auch Erwachsene lebenslang lernen. Zwar können und brauchen wir nicht alles wissen. Doch wir sollten in den Grundzügen und zeitgemäß unsere Welt so verstehen, dass wir uns darin orientieren können. Dann sind wir gebildet. Auch dazu will diese Schrift einen kleinen Beitrag leisten.

Unser **Wissen über die Welt und das Weltall** hat sich in den letzten Jahrzehnten atemberaubend vergrößert. Als Bub schaute ich mit Wissensdurst oft stundenlang in den großen ‚Stieler's Hand-Atlas über alle Theile der Erde und über das Weltgebäude' (1876) meines Großvaters. Darin ging ich auf Entdeckungsreise. Die Mitte von Afrika heißt dort ‚Hochafrika' und zeigt nur eine weiße Fläche. Mit Bleistift hat mein Großvater den ungefähren Verlauf eines großen Flusses und dessen Namen ‚Livingstone-Strom' eingezeichnet. Das ist der Kongo, der zunächst nach diesem Afrikaforscher benannt wurde. Der Viktoriasee in Ostafrika ist in gestrichelten Umrissen und völlig unrichtig dargestellt. Das Herz Afrikas wurde erst in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts erforscht!

Als ‚Weltgebäude' zeigt der große Atlas meines Großvater nur den nördlichen und südlichen Stern-Himmel und das Planeten-System der Sonne. Heute wissen wir, dass unser Sonne samt Planeten Teil der Milchstraße ist, in der es Milliarden von Sonnensystemen wie das unsrige gibt. Aber erst seit der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts ist bekannt, dass unsere Milchstraße nur eine von Milliarden Galaxien[11] im Weltall ist. Mit immer größeren Fernrohren blicken die Menschen immer tiefer in den Weltraum. Hier finden heute die großen Entdeckungsreisen statt.

Dabei will der Mensch nicht nur Einzelwissen sammeln, sondern auch die **Zusammenhänge und Gesetze verstehen**. Unser Neugiertrieb zwingt uns dazu. Bereits von Natur aus sichtet und ordnet unser Gehirn die eingehenden Sinneseindrücke. Viele kennen das Bild, bei dem wir spontan entweder eine Vase oder zwei Mädchengesichter sehen. Bevor wir denken, hat unser Gehirn von selbst

[11] galaxias (griech.) = Milchstraße

und ohne unser Zutun entschieden, was wir erkennen. Mit Nachdenken können wir dann den optischen Trick durchschauen.

Das **bewusste, planvolle und zielgerichtete Ordnen** unserer Erkenntnisse, das Verstehen der Welt durch Nachdenken betreibt die Wissenschaft. Im ersten Schritt wird gesichtet und gesammelt. Das macht die beschreibende Wissenschaft. Dann wird geordnet und versucht die Zusammenhänge zu verstehen; jetzt sprechen wir von erklärender Wissenschaft (z. B. die Evolutionstheorie über die Entstehung der Arten von Charles Darwin). Am schwierigsten ist die vorhersagende Wissenschaft. Sie ist zugleich am anfälligsten für Fehleinschätzungen, wie wir von den Wirtschaftswissenschaften und der Wettervorhersage, der Meteorologie wissen.

Der Mensch hat zwei hochentwickelte Werkzeuge, um sein Denken zu ordnen und sich über Zusammenhänge ein Bild zu machen. Das sind **die Sprache und die Mathematik**. Und ganz ohne Mathematik kommt heute keiner durchs Leben. Schon unser Computer funktioniert mit Mathe. Es gibt fast keinen Beruf mehr ohne Zahlen und Tabellen, ohne Rechnen und Rechner. Ja, wir können sagen: Mathe braucht jeder! Und mit Mathe verstehen wir die Welt besser.

1.3 Verstehen heißt, (mit Händen) begreifen und erfassen

Die Mathematik wird als die reinste aller Wissenschaften bezeichnet.[12] Daher ist sie unseren aufgeweckten und abgelenkten, von Reizen des Fernsehers und Internets überfluteten jungen Menschen und vielen Erwachsenen oft schwer zu vermitteln. Mathe muss praktisch, anschaulich und lebensnah dargeboten werden. Mathe ist eine Wissenschaft mit einer eigenen Sprache, mit besonderen Ziffern, Zeichen und Formeln. Daran müssen fast alle Menschen behutsam und ansprechend herangeführt werden.

Auch unsere deutsche Sprache ist ein hochentwickeltes Kulturgut. Mit ihr können wir nicht nur (fast) alles ausdrücken; sie erklärt auch vieles. Sie enthält den Erfahrungsschatz von Jahrtausenden. Schon Wörter legen vieles offen. **Dem ‚Verstehen' geht das mit den Händen ‚Begreifen' und ‚Erfassen' voraus.** „Ich hab’s begriffen“, sagt der Schüler, wenn er etwas verstanden hat. Und genau so wollen wir an die Mathe herangehen. Wir werden alle mathematischen Erkenntnisse mit Würfeln und dann erst mit Zahlen erarbeiten. So entsteht vor unseren Augen eine anschauliche ‚Würfelwelt’.

Denn es muss an der Art der Wissensvermittlung liegen, dass Mathe von so vielen nicht geliebt, ja abgelehnt wird. Uns allen ist eine gewisse **mathematische Begabung angeboren**. Schon Säuglinge sollen ein, zwei und drei spontan unterscheiden können. Selbst Affen konnten im Tierversuch Tauschgeschäfte abwickeln, die ein erhebliches Verständnis für Mengen und zahlenmäßige Vergleiche erforderten. Sie betrieben ‚vernünftigen’ Tauschhandel, lernten für größere Anschaffungen zu sparen und waren äußerst verärgert, wenn sie plötzlich fürs gleiche ‚Geld’ weniger bekamen.

In größter Verallgemeinerung oder Abstraktion geht es bei allen hier behandelten Rechenarten „nur“ um ein Vergrößern oder Verkleinern. Das gilt sogar mit einem kleinen Umweg für das Logarithmieren, Differenzieren und Integrieren. Und das kann doch nicht so schwer sein!

[12] Das Wort Mathematik kommt vom Griechischen „mathema“ und bedeutet schlicht „Wissenschaft“.

2 Vom Zählen zum Rechnen

Wir schauen zuerst, wie die Menschen vom Zählen zum Rechnen fortgeschritten sind. Erst wurden Menschen und Sachen gezählt (vor 30.000 Jahren). Dann wurden Entfernungen abgemessen. Mit dem Ackerbau vor etwa 12.000 Jahren war das Vermessen von Flächen nötig. Spätestens in den ersten Städten mit großen Bauwerken mussten vor 5.000 Jahren Räume ausgemessen werden.
Damit haben wir ganz zwanglos die ersten drei Ausdehnungsarten oder Dimensionen kennengelernt: die Linie, die Fläche, den Raum.

2.1 Das Zählen von Menschen und Sachen

Seit grauer Vorzeit benutzen die Menschen die Zahlen. Zählstäbe aus Holz wurden bereits vor mehr als 30.000 Jahren verwendet.[13] (Die letzte große Eiszeit war in Europa vor 18.000 Jahren.) Die Menschen zählten ihre Familienmitglieder, die Jagdbeute, später ihre Haustiere oder gar ein großes Heer wie schon die Griechen im Altertum. Da wir zehn Finger haben, ist der Zahlenraum von eins bis zehn schon früh vom denkenden Mensch (homo sapiens) beherrscht worden. Kommen die Zehen noch dazu, so erweitert sich unsere Zahlenwelt schnell bis auf 20. Wer auf diese Weise Leute oder Sachen zählt, benutzt die ganzen und positiven Zahlen. Sie heißen daher auch **‚natürliche Zahlen'.** Wir werden bei den Rechenarten die unterschiedlichen Arten von Zahlen noch darstellen und erklären.

2.2 Das Abmessen von Strecken und Linien

Wir können die Zahlen aber nicht nur zum Abzählen von 'natürlichen' Einzelheiten (Menschen, Tieren, Sachen usw.) verwenden, sondern auch zum Berechnen einer wachsenden Abfolge von Mengen, Größen, Tatsachen oder Ereignissen benutzen. Das Erfassen des Vergrößerns oder Verkleinerns von Viehherden oder anderen

[13] Black, Jeremy, Atlas der Weltgeschichte, London 2005, S. 32

Mengen an Dingen oder von reinen Zahlenmengen ist eine Grundaufgabe des Rechnens, der Mathe. Die 7 Rechenarten beschäftigen sich ganz allgemein gesagt alle mit dem Vergrößern oder Verkleinern.

Das wird uns nun laufend beschäftigen. Das einfachste Beispiel für solch eine Reihenfolge oder Reihe ist das Metermaß. Manche Eltern messen von Zeit zu Zeit ihr Kind und vermerken die jeweilige Größe mit einem Bleistiftstrich am Türpfosten. Die Striche wachsen so langsam über die Monate und Jahre immer mehr nach oben. Die Mathematiker sprechen von einem **Zahlenstrahl[14].** Vor allem die letzte Zahl, die tatsächlich erreichte Größe interessiert dabei, sie zeigt die erreichte Gesamtgröße oder Ausdehnung an. „Unser Fritzel ist schon 1,20 groß“, freut sich die Mutter.

Dieses Beispiel beschäftigt sich mit der Abmessung von Längen. Auch das ist schon sehr alt. Die Römer setzten Meilensteine an ihre Straßen. Jeder konnte damit die zurückgelegte Entfernung nachrechnen.

Heute reisen alle Leute und müssen dazu Entfernungen und Reisezeiten ausrechnen. Der kürzeste Weg von München nach Wien ist die Luftlinie, die wir auf der Landkarte abmessen können. Und wenn wir nun auf der Karte nachsehen, so ergibt sich, dass München und Wien rund 350 Kilometer Luftlinie voneinander entfernt sind. Fliegt mein Flieger in einer Stunde 350 Kilometer weit, dann brauche ich eine Stunde, um vom Flughafen München-Erding nach Wien-Schwechat zu kommen. Ein einzelner Lichtstrahl, genauer ein Lichtteilchen (Lichtquant oder Photon), das von der Sonne ausgeht und nach acht Minuten auf unserer Erde auftrifft, hat auch eine solche eindimensionale, strahlenförmige Ausdehnung hinter sich.

Das Abmessen von Strecken oder Linien ist ein Rechnen in der **ersten Ausdehnungsart** oder ersten Dimension. Wir sagen ein Punkt wächst in eine bestimmte Richtung und wird zu einer Linie oder einer Geraden. Dabei ist eine Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten; und eine Linie ist die Bahn eines bewegten Punktes. Das Wachsen eines Punktes oder das immer länger

---

[14] Ein ‚Strahl' ist eine Halbgerade, die von einem Punkt ausgeht und ins Unendliche führt.

Werden einer Linie ist also die erste Ausdehnungsart oder erste Dimension. Sie umfasst alle Linien, auch Schlangenlinien, z. B. auf einem Blatt Papier.

Wir verwenden im Folgenden den deutschen Ausdruck ‚Ausdehnungsart'. Denn das Wort Dimension ist mehrdeutig. Das lateinische ‚dimensum' bedeutet ursprünglich ‚nach allen Seiten abgemessen'. Im Deutschen heißt ‚Dimension' heute ‚Ausdehnung oder Ausmaß'. Dabei bezieht sich das ‚Ausmaß' vor allem auf die Abmessung eines festen (statischen) Gebildes. Mit einer ‚Ausdehnung' verbinden wir jedoch ein ‚Größer-Werden, also einen dynamischen Vorgang. Genau dies meinen wir aber, wenn wir künftig von ‚Ausdehnungsart' sprechen. Wir können mit diesem und anderen von uns gebrauchten deutschen Begriffen auch zeigen, wie klar und anschaulich, wie schön und ausdrucksfähig die deutsche Sprache ist. Wir setzen beim Leser keinerlei Vorkenntnisse voraus und führen die Fachausdrücke ganz beiläufig und immer mit einer Erklärung ein.

2.3 Das Vermessen von Feldern und Flächen

Nun haben die Menschen aber seit alter Zeit nicht nur Vieh gezählt und Entfernungen gemessen, sondern wollten auch wissen, wie groß ihre Felder sind. Mit der Ausbreitung des Ackerbaus ab 11.000 v. Chr. erfuhr das Rechnen einen großen Entwicklungsschub. Denn nun mussten die Menschen Flächen berechnen und vermessen. Außerdem wurden spätestens zu dieser Zeit verschiedene Kalender eingeführt, um die Zeiten für die Aussaat und das Ernten der Feldfrüchte zu bestimmen.

Der heute für die Raumlehre gebräuchliche Ausdruck ‚Geometrie' kommt aus dem Altgriechischen und heißt wörtlich übersetzt ‚Feldmesskunst'. Unsere Vermessungsingenieure sind heute noch ständig mit Landvermessungen beschäftigt.

Die **Fläche ist die zweite Ausdehnungsart**, mit der wir oft rechnen müssen. Wir stellen uns also vier Grenzsteine vor, die die Eckpunkte eines quadratischen Ackers markieren. Hat der Acker nun eine Seitenlänge von 100 Metern, so beträgt die

Fläche 10.000 Quadratmeter (= m^2); 100 x 100 = 10000 Wir müssen eigentlich nur die Nuller links vom Gleichheitszeichen abzählen und haben das Ergebnis.

In der Zahlenwelt schreibt man: 100 m x 100 m = 10.000 m² - Wir können uns diese oder eine ähnliche Berechnung auf einen Blatt Papier mit Karos veranschaulichen.

Damit haben wir die mathematische Schreibweise einer **Gleichung** eingeführt. Hier zeigen Gleichungen einen Rechenvorgang und sein Ergebnis: 2 x 2 = 4 Auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens steht das Gleiche, nur in jeweils anderer Form.

Nun überfordern große Zahlen wie 10.000 schnell die Vorstellungskraft der Menschen. Daher wurden für Äcker Hektar eingeführt. Ein Acker mit 100 m x 100 m = 10.000 m² = 1 ha (= Hektar) groß. Ein Acker mit 100 m Seitenlänge ist also genau ein Hektar groß, er hat die Fläche von einem Hektar.

Für Bauplätze ist das Rechen weder mit Quadratmetern noch mit Hektar anschaulich. Da wurde als Maß das Ar (auch als ‚a' geschrieben) erfunden. Ein Ar ist 10 m x 10 m = 100 Quadratmeter. „Der Bauplatz hat 5 Ar.", sagt der Architekt, wenn er 50 m x 10 m = 500 m² groß ist. – Die Größen von Zimmern und Wohnungen werden in Quadratmetern (m²) angegeben.

Hektar, Ar und Quadratmeter sind die gängigen Flächenmaße.
In mathematischer Schreibweise: 1 ha = 100 a = 10.000 m²

Wir merken, dass bei den Flächenmaßen im täglichen Grundstückverkehr andere Größenordnungen oder Maßstäbe praktisch sind als Quadratmeter (abgekürzt: qm beziehungsweise m²) oder Quadratkilometer (qkm bzw. km²). Würden wir nur in Quadratmetern oder Quadratkilometern rechnen, dann wären die Ergebnisse entweder zu groß oder zu klein. Unsere Vorstellungskraft würde überfordert.

Das führt zu einer wichtigen Erkenntnis. In der **Wahl der Maßeinheiten** oder Maßstäbe sind wir Menschen völlig frei. Das zeigt schon die Tatsache, dass es in der Geschichte und auch noch heute in vielen Ländern sehr unterschiedliche Maß- und Längeneinheiten gibt. Ursprünglich ging der Mensch von seinem Körper aus. Er rechnete mit ‚Fuß' und ‚Elle'. In die Physik gibt es die spannende Frage, ob es in der Natur so etwas wie natürliche Maßeinheiten, sogenannte ‚Naturkonstanten' gibt. Die Physiker sagen, es gibt sie. Darüber werden wir später sprechen.

2.4 Das Ausmessen von Räumen und Körpern

Nun gibt es aber nicht nur Längen und Flächen, sondern auch **Raumgebilde**. In der Geschichte gab es immer wieder Streit darüber, ob das Erdreich unterhalb eines Ackers in seiner ganzen Tiefe demjenigen Bauern gehört, der Eigentümer dieses Flurstückes ist. Das war nämlich dann wichtig, wenn da unten Bodenschätze wie Gold, Silber oder Kohle gefunden wurden. Im Mittelalter und der frühen Neuzeit sagten die Landesherren einfach, diese Schätze gehörten nicht zum Eigentum am Grundstück, sondern seien ein ‚Regal'[15]. Dadurch waren sie Königsrecht und gehörten dem Landesfürsten. Die Nutzer eines solchen Bergregals, das der Landesherr dann oft verkauft oder verliehen hat, wurden sehr reich. Der Reichtum der Familien Fugger und Welser aus Augsburg in der frühen Neuzeit (ab 1500 n. Chr.) stammte unter anderem aus erworbenen Bergregalien. Noch heute gibt es staatliche Bergämter, die sich mit der umweltverträglichen und öffentlich-rechtlichen Nutzung von Bodenschätzen beschäftigen.

Aber auch die Frage, ob der Luftraum über einem Grundstück zum Eigentum zählt, war immer wieder strittig. Unser Bürgerliches Gesetzbuch (BGB) stellt in § 905 Satz 1 den Grundsatz auf: „Das Recht des Eigentümers eines Grundstücks erstreckt sich auf den Raum über der Oberfläche und auf den Erdkörper unter der Oberfläche." Doch sofort wird dies in § 905 Satz 2 eingeschränkt: „Der Eigentümer kann jedoch Einwirkungen nicht verbieten, die in solcher Höhe oder Tiefe vorgenommen werden, dass er an der Ausschließung kein Interesse hat." Wie das genau zu verstehen ist, regeln umfangreiche Sonderrechte, nämlich das Bergrecht und das Luftrecht.

Mit diesen Überlegungen sind wir zur **dritten Ausdehnungsart** oder Dimension vorgestoßen. Es handelt sich um den Raum und seine Berechnung. Wenn nun ein

[15] Unter ‚Regalien' (lat. reges = Könige) werden seit den Frankenkönigen ab 550 n. Chr. (Merowinger und Karolinger) königliche Hoheitsrechte verstanden.

Grundstückseigentümer ein fünf Ar großes Grundstück mit einer fünf Meter hohen Halle vollständig überbaut, dann hat dieses Gebäude einen Rauminhalt oder ein Volumen von insgesamt 2.500 Kubikmetern (m^3).[16]. –

Dies errechnet sich aus 500 Quadratmetern mal fünf Meter oder mathematisch dargestellt: $500 \text{ m}^2 \times 5 \text{ m}^1 = 2.500 \text{ m}^3$

Wir wollen uns dieses ‚Rechnen' in den unterschiedlichen Ausdehnungsarten im folgenden Abschnitt noch einmal zusammenhängend veranschaulichen und dabei vereinheitlichen; also gemeinsame Grundsätze und Zusammenhänge aufdecken.

Dabei müssen wir zwischen der reinen, abstrakten Zahlenwelt (Arithmetik oder Zahlenlehre) und der bildlichen Raumwelt (Geometrie oder Raumlehre) unterscheiden. Wir beschreiben nun alle Vorgänge zur Veranschaulichung in beiden Welten. Die räumliche Darstellung geschieht mit Würfeln und führt uns ganz zwanglos zu unserer anschaulichen ‚Würfelwelt'.

Was heißt eigentlich ‚**Abstraktion'**. Der deutsche Ausdruck ist Verallgemeinerung. Bei der Verallgemeinerung wird nur das betrachtet, was <u>allen</u> betrachteten Dingen <u>gemeinsam</u> ist – allgemein. Abstrakt sieht das Gleiche genau umgekehrt. Es sieht von allen Besonderheiten der betrachten Dinge ab (abstrahere (lateinisch) = abziehen, wegnehmen). Wenn ich alle Besonderheiten wegnehme, dann habe ich nur noch das, was allen gemeinsam ist. Es ist ein Lob, wenn es in einer dienstlichen Beurteilung heißt: „Kann abstrakt denken."

Das ist der erste Schritt zur Mathe. Denn in der reinen Zahlenlehre wird von allem, sogar von einem bestimmten Maßstab (z.B. cm oder km) abgesehen. Das Gegenteil ist ‚konkret' oder ‚handgreiflich'. So sind unsre Würfel, mit denen wir die abstrakte Zahlenlehre ‚begreifbar' machen wollen, ‚konkrete, handgreifliche oder gegenständliche Dinge'.

[16] Kubik kommt von kubus (griechisch) und bedeutet Würfel.

3 Vom Punkt zur Würfelwelt

3.1 Punkt – Linie – Fläche – Raum

Wir haben somit drei unterschiedliche Ausdehnungsarten. Wir haben Strecken oder Linien abgemessen, Äcker und Flächen vermessen, Gebäude und Räume ausgemessen. In der Geometrie werden diese drei Ausdehnungsarten oder Dimensionen unterschieden. Der Ursprung oder die **Ausdehnungsart null** ist ein Punkt. Ihm wird noch gar keine, also null Ausdehnung zugeschrieben. Der Punkt hat den Mathematikern bis heute schon viel Kopfzerbrechen bereitet.

Nach Euklid (um 365 – um 300 v. Chr.), dem Vater der klassischen Geometrie, ist der **Punkt** ein Etwas, das **keine Teile** hat. Der Punkt entspricht somit der altgriechischen Vorstellung vom Atom, das wörtlich das ‘Unteilbare’ heißt. Punkt oder Atom sind danach das kleinste Etwas, in das alle Dinge der Welt zerlegt werden können. Kleiner geht nicht!

Heute wissen wir, dass ein Atom sehr wohl noch teilbar ist und aus einer ganzen Reihe von viel kleineren Teilchen besteht. Und die Suche der Naturwissenschaftler nach dem allerkleinsten, unteilbaren Teilchen ist heute in vollem Gange. Für solche unteilbaren Gebilde hat die Physik heute den Ausdruck **‚Elementarteilchen’** eingeführt. Und genau das meinten auch die alten Griechen, wenn sie von ‚Atomen’ sprachen. Auch uns wird der Punkt als Ursprung aller Zahlen und räumlichen Gebilde gleich noch einige Überraschungen und vertiefte Erkenntnisse bescheren (unten unter ‚4.1 Der geheimnisvolle Ursprung’).

Hier wollen wir aber mit der klassischen, bis 1899 gültigen Anschauung des Punktes beginnen. Der **Punkt** ist danach der Ausgangspunkt und **Ursprung aller Ausdehnungen**. Genauer gesagt: Er hat nach dieser Begriffsbestimmung noch keine Ausdehnung. Wenn wir allerdings einen Punkt auf ein Blatt Papier machen und mit der Lupe betrachten, dann hat er sehr wohl eine räumliche Ausdehnung. Hätte er keine, dann könnten wir ihn nicht sehen. Darüber werden wir nachdenken müssen.

Die Vorstellung von „null“ Ausdehnung wird uns in der Zahlenwelt durch die Hochzahl (Potenz) vor Augen geführt. Setzen wir den Punkt mit der Zahl 1 gleich, dann können wir schreiben:

$$\mathbf{1^0 = 1}$$

Die Hochzahl (Exponent) null zeigt uns, dass noch keine Ausdehnung stattgefunden hat. Doch wie sollen wir den folgenden Mathe-Grundsatz verstehen?

Es gilt aber auch noch: $\mathbf{1^2 = 1}$ oder $\mathbf{1^3 = 1}$ oder gar $\mathbf{1^{10.000} = 1}$

Seit dem deutschen Mathematiker David Hilbert (1862 - 1943) kann ein Punkt daher auch aus einem Zahlenpaar (Punkt der Ebene: 1^2) bestehen oder aus einer Zahlen-Dreiheit (Zahlentripel - Punkt des Raumes: 1^3). Ein Punkt kann sogar allgemein aus einer geordneten Zahlen-Vielheit bestehen (Zahlen-n-tupel - Punkt des viel- oder n-dimensionalen Raumes, z.B. 1^n oder Zahlen-Vielheit wie $1^{10.000}$). Seit Hilbert wird so erstaunlich ein Punkt definiert. In einem Teilgebiet der Raumlehre, das sich synthetische Geometrie nennt, wird der Punkt als undefinierbarer Grundbegriff bezeichnet.

Das alles ist unanschaulich, nicht ‚fassbar‘. Wir werden es uns gleich in der Würfelwelt begreifbar machen. Dort werden wir ‚den geheimnisvollen Ursprung’ besprechen. Noch später werden wir darauf zurückkommen, wenn wir im Abschnitt ‚Vom Würfel zum Weltall’ unseren Blick auf den Ursprung des Weltalls richten.

Aus all dem ergibt sich jedoch, dass sich der **Punkt** in der Raumlehre (Geometrie) und die **Zahl 1** in der Zahlenlehre (Arithmetik) entsprechen.

Von diesem Punkt oder der Zahl 1 ausgehend wollen wir nun die Ausdehnungsarten darstellen. Als **Maßstab für unsere Ausdehnungen** wählen wir den Zentimeter. Dabei wissen wir, dass die Wahl des Maßstabs (wie bereits erwähnt) frei oder willkürlich ist. Wir hätten auch Meter nehmen können, aber das lässt sich auf einem Blatt Papier nicht mehr zeichnen. Ähnliches gilt für die Größe der Ausdehnungsschritte: Um wie viele Zentimeter soll im ersten Schritt unser Punkt oder die Zahl 1 größer werden? Wir wollen im Folgenden die Ausdehnungen jeweils als eine Verdreifachung darstellen.

Wir wählen also die Zahl drei und damit drei Zentimeter als Ausmaß der jeweiligen Vergrößerungen. (Die gefundenen Grundsätze gelten auch bei Verdoppelungen, Vervierfachungen oder sonstigen ganzzahligen Vergrößerungen.) Die hier gewählte Vergrößerung um das Dreifache soll sich dann bei allen Ausdehnungsarten (Dimensionen) abspielen: beim Punkt, der Linie, der Fläche und dem Raum.

Nun steckt die **Zahl drei** bereits im Punkt oder in der Zahl 1, wie uns die Zahlenlehre zeigt:

Es gilt nämlich in der Arithmetik: $\mathbf{3^0 = 1}$

Unser Dreier hat nur noch keinen Ausdehnungsschritt hinter sich, steckt noch im Ursprung, ist noch ein Punkt.

Das bedeutet verallgemeinert und grundsätzlich: Jede Zahl ohne Ausdehnung ist gleich 1 oder ein Punkt. Wir können auch sagen, im **Ursprung stecken alle Zahlen**, bevor sie begonnen haben, sich auszudehnen.

Damit wir uns das gut merken können, betrachten wir ein Beispiel aus der Natur. Nehmen dazu wir die befruchtete Eizelle eines Menschen. Sie ist so klein, dass wir sie mit bloßen Augen nicht sehen können. Und doch steckt In dieser einen Zelle (= 1) der ganze künftige Mensch. Und unmittelbar nach der Befruchtung beginnt durch die Zellteilungen das Größer-Werden. Die Eizelle hat den Befehl erhalten: „Wachse und vermehre dich!“

In der Mathematik wird jede Zahl mit einer Hochzahl (z.B. 2^2 oder 3^3) auch **Potenz** genannt. In der Biologie bedeutet der Ausdruck ‚Potenz’, die Fähigkeit einer Zelle, eines Keimes oder eines Gewebes sich zu entwickeln, also die Fähigkeit zu wachsen.

Wir erteilen nun unserem Punkt den Befehl: „Lieber Punkt bewege dich und werde zu einer geraden Linie, und zwar zu einer **Strecke** von drei Zentimetern!“ Die folgende

Abbildung zeigt den Vorgang. (Die Maße verändern sich beim Ausdruck oder Zoomen eurer Word-Datei! Nachmessen bringt also nichts. Wir einigen uns einfach darauf, dass es 3 cm sein sollen. Nur so lassen sich auch die folgenden Abbildungen (Abb.) auf eine Seite unterbringen.)

Abb. 3.1

Dazu müssen wir einige Begriffe klären. Wir wissen bereits: Das Wachstum eines Punktes oder das immer länger Werden einer Linie ist die erste Ausdehnungsart oder erste Dimension. Die Mathematiker sagen, die **Linie** ist ein abstraktes eindimensionales geometrisches Gebilde. Die Linie kann gerade (Gerade), krumm (Kurve) oder geknickt verlaufen. Wir wählen in unserem Beispiel die einfachste Form, nämlich den geraden Verlauf. Allerdings ist eine **Gerade** nicht nur die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten, sondern sie ist auch nach der Festlegung der Mathematiker in beide Richtungen unbegrenzt.

Damit wollen wir hier nicht arbeiten. Denn wir lassen unsere Gerade in einem Ursprung beginnen und dann nur nach einer Seite wachsen. Das nennt man einen **Strahl** oder eine **Halbgerade**. In unserem Beispiel wollen wir aber den Strahl auch nicht in einer Richtung ins Unendliche wachsen lassen. Unser Befehl lautete vielmehr, dass das Wachstum nach drei Zentimetern beendet sein soll. Ein solches Gebilde heißt in der Raumlehre **Strecke**. Unsere Abbildung 3.1 zeigt eine Strecke von 3 cm Länge. Alle die eben angesprochenen Linien (Gerade, Strecke, Halbgerade usw.) bewegen sich in der ***ersten Ausdehnungsart***.

In der **Zahlenwelt** ausgedrückt heißt diese eindimensionale Ausdehnung um das Dreifache, die Größe 3 nun: 3^1. Und sie wird geometrisch gezeichnet als die obige Strecke von 3^1 cm^1. Die Hochzahl ^{1} (Potenz) zählt die Ausdehnungsarten und zeigt hier an, dass wir uns in der ersten Ausdehnungsart bewegen.

Wie können wir nun diese Strecke in die nächste, die ***zweite Ausdehnungsart*** übergehen oder wachsen lassen? Wie machen wir aus einer Strecke eine **Fläche**?

Wir erteilen den Befehl: „Liebe Linie, wachse um drei Zentimeter nach oben, und zwar im rechten Winkel zu einer quadratischen Ebene!“ Es entsteht die folgende Abbildung:

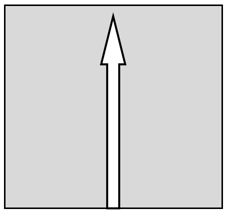


Abb. 3.2

Nach der Raumlehre ist das Quadrat ein Parallelogramm mit vier gleich langen Seiten und vier rechten Winkeln. Bei einem Parallelogramm verlaufen die gegenüberliegenden Seiten parallel. Beim Quadrat und der Raute sind alle Seiten gleich lang. Sind die Winkel dann noch 45 Grad (rechtwinklig), dann ist das Parallelogramm ein Quadrat.

In der mathematischen Zeichensprache ausgedrückt stellt sich unser Beispiel so dar:

$$\mathbf{3^2 = 9}$$

(arithmetisch) und

$$\mathbf{3^2\ cm^2 = 9\ cm^2.}$$

(geometrisch)

cm^2 wird auch als qcm (= Quadratzentimeter) geschrieben.

Es gibt nun viele flächenartige Gebilde, mit allen möglichen Umrissen.[17] Sie alle sind Formen in der zweiten Ausdehnungsart. Dabei können die Flächen ebene oder gekrümmte Gebilde sein. So gibt es Äcker in Hanglage (Halden), mit Buckeln und solche, die ganz platt in einer Ebene liegen.

Nun möchten wir unsere quadratische Fläche in die ***dritte Ausdehnungsart*** wachsen und zu einem **Raum** werden lassen. Aus der Fläche soll ein räumliches

[17] Es gibt auch viele Flächen mit anderen, nicht-quadratischen Formen, die einen Flächeninhalt von 9 cm^2 haben. Erst die weiteren Vorschriften (Parallelogramm mit gleich langen Seiten und rechten Winkeln) führen uns zum Quadrat. Ähnliches gilt für die folgenden Beispiele wie Würfel, Stange, Brett.

Gebilde und zwar ein Würfel werden. Dazu befehlen wir: „Liebe Fläche, wachse im rechten Winkel nach oben und werde ein Würfel von drei Zentimeter Höhe. Die folgende Abbildung zeigt das Gebilde.

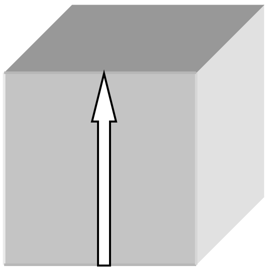


Abb. 3.3

Der Würfel wird auch Kubus genannt.

Der Rauminhalt oder das Volumen unseres Würfels ist:

3^3 cm^3 = 27cm^3 (Kubikzentimeter, auch ccm).

In der Arithmetik, also der ‚reinen und abstrakten' Zahlenwelt, werden keine Maßeinheiten für die Ausdehnung dargestellt; es heißt nur:

$3^3 = 27$

Hier endet üblicherweise der gemeinsame Weg von Zahlenlehre und Raumlehre. Der Ausdruck 3^4 ist nicht mehr geometrisch darstellbar, heißt es allgemein. Stimmt das? Oder können wir uns auch die weiteren Ausdehnungen bildlich veranschaulichen?

Wenn ihr also bis hierher vorgedrungen seid, dann macht eine Pause und überlegt scharf: Kann auch ein Würfel wachsen? Wenn ja, wie?

3.2 Das Wachsen des Raumes mit der Zeit

Wir wissen von Einstein, dass die vierte Dimension die Zeit ist. Also führen wir die Zeit in unsere Ausdehnungen ein. Wir haben bisher schon von 'wachsen' gesprochen, aber das war ungenau. Schauen wir genau den Punkt an, der langsam zur Strecke wird. Wir sehen einen Ablauf, der sich in der Zeit abspielt. Nicht plötzlich, mit einem Schlag oder Zauberspruch wurde unser Punkt eine Linie, sondern wir brauchten etwas Zeit, bis wir mit dem Bleistift vom Ausgangspunkt unsere Strecke von 3 cm gezeichnet hatten. Wir haben die Zeit bereits benutzt. Denken wir an unsere Kindheit. Von ihr wissen wir, was ‚wachsen' ist.

‚Wachsen' heißt, mit der Zeit größer werden (Begriffsbestimmung).

Wir sagen unserem Würfel ($3^3 cm^3$), er solle wachsen. Lassen wir also unseren Würfel $3^3 cm^3$ in den gleichen Schüben wie bisher wachsen, nämlich jeweils um das Dreifache. Und dies soll auch in der gleichen Art und Richtung geschehen; so wie wir es oben mit Punkt, Strecke, Quadrat und Würfel gemacht haben. Als Zeiteinheit wählen wir wiederum frei und willkürlich eine Maßeinheit; es sei die Sekunde (sec).

Allerdings müssen wir dazu noch einmal beim Ursprung (3^0) beginnen. Wir können nicht einfach zwischendurch bei unserem klassischen Würfel (3^3) anfangen. Denn wir haben bei ihm bereits drei Ausdehnungsarten oder Wachstumsschritte zurückgelegt.

Denn es hat gegolten:

- Der Punkt hat keine oder 0 Ausdehnung, 3^0
- die Linie oder Strecke ist die 1. Ausdehnung, 3^1
- die Fläche oder das Quadrat die 2. Ausdehnung, 3^2
- der Raum oder Würfel die 3. Ausdehnung. 3^3

Wir betrachten nun alle Ausdehnungen ab dem Ursprung als ein Wachsen, das heißt als ein ‚mit der Zeit größer werden'. Die **Hochzahl** (Exponent) zählt dabei diese Wachstumsschübe. Sie ist sozusagen die Uhr hoch oben im Kirchturm. Sie zeigt die Zeit an oder die Anzahl der bisherigen Glockenschläge, bei deren Ertönten je ein Wachstumsschub, hier eine Verdreifachung ausgelöst wird. Und da wir die Sekunde als Zeiteinheit eingeführt haben, soll die Kirchturmuhr jede Sekunde schlagen und die Hochzahl zählt die Glockenschläge der Kirchturmuhr. Bei 3^0 hat die Glocke noch nicht geschlagen, eine Ausdehnung, ein Wachstum hat noch nicht stattgefunden.

Doch wenn nach der ersten Sekunde die Uhr schlägt, ist unser Punkt zu einer drei Zentimeter langen Strecke (3^1 cm) gewachsen. Wenn wir die Stunde als Zeiteinheit gewählt hätten, wäre unser Punkt so langsam gewachsen, wie ein großer Uhrzeiger braucht, um einmal seine Runde zu drehen. Beim nächsten Glockenschlag ist unser bekanntes Quadrat (3^2 cm^2) entstanden. Danach wächst aus dieser Fläche unser Würfel heraus (3^3 cm^3). Beim dritten Ertönen der Glocke ist der Würfel fertig.

Wenn nun die Uhr zum vierten Mal schlägt, hat sich dieser Würfel wiederum verdreifach. Eine Seite ist aus ihm herausgewachsen und ist eine **Stange**, eine Würfelstange geworden. Wir können auch sagen, er wird zu einer Vierkant-Stange (3^4 oder 3^4 cm^3). Dazu ist die rechte Seitenwand des Würfels (vom Betrachter gesehen) nach rechts herausgewachsen. Dadurch hat sich der Würfel (3^3) verdreifacht (3^3 X 3 = 81). Die Stange hat die Abmessungen: Höhe 3 cm; Tiefe 3 cm, Länge 3 x 3 cm = 9 cm. Das bedeutet, die Stange hat einen Rauminhalt von 81 cm^3 oder besteht aus **81 Würfeln von je 1 cm^3 Rauminhalt.** In der Arithmetik lautet die entsprechende Gleichung: **3^4 = 81**

Die folgende Abbildung zeigt das Gebilde dieser ***vierten Ausdehnungsart***.

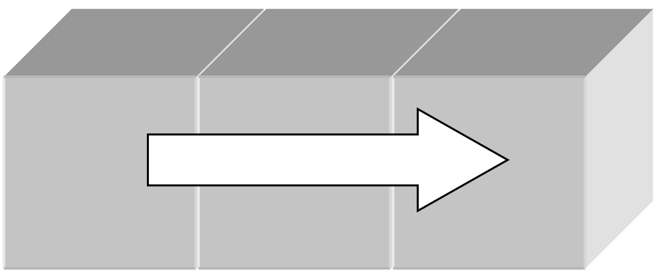


Abb. 3.4

Bei der nächsten Verdreifachung wächst aus der Sicht des Betrachters die Rückwand der Vierkant-Stange in die Tiefe. Das ergibt ein quadratisches **Brett** (3^5), ein Würfelbrett. Es erinnert an die Fläche bei 3^2. Die Grundfläche dieses Brettes ist ein Quadrat mit Seitenlängen von je neun Zentimetern. Die Höhe beträgt drei Zentimeter. Daraus ergibt sich ein Volumen von 243 cm^3, also **243 Würfeln**.

In der Zahlenwelt schreiben wir: **3^5 = 243** – Die folgende Abb.3.5 zeigt das Würfelbrett.

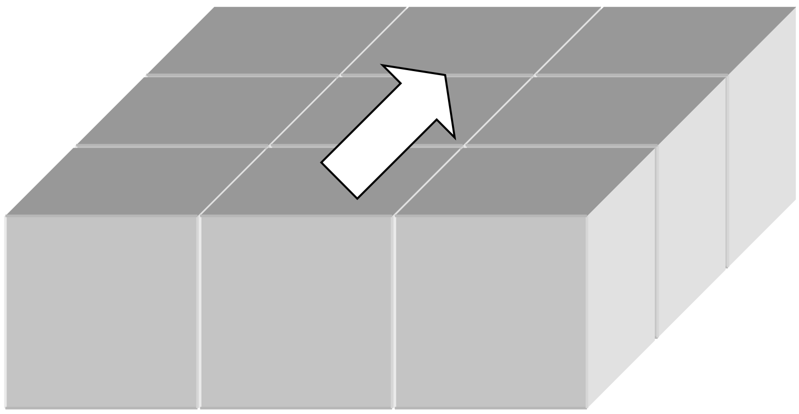


Abb. 3.5

Bei einer weiteren Verdreifachung hebt sich die Decke des Bretts. Das führt zu einem neuen, größeren Würfel (3^6). Wollen wir ihn **Neu-Würfel** nennen. Er hat die Abmessungen 9 cm x 9 cm x 9 cm; das ergibt einen Rauminhalt von **729 cm^3** und er besteht somit aus **729 Würfel** von je 1 cm^3; in der Zahlenwelt schreiben wir: **3^6 = 729** Die Abb. 3.6 zeigt den Neu-Würfel.

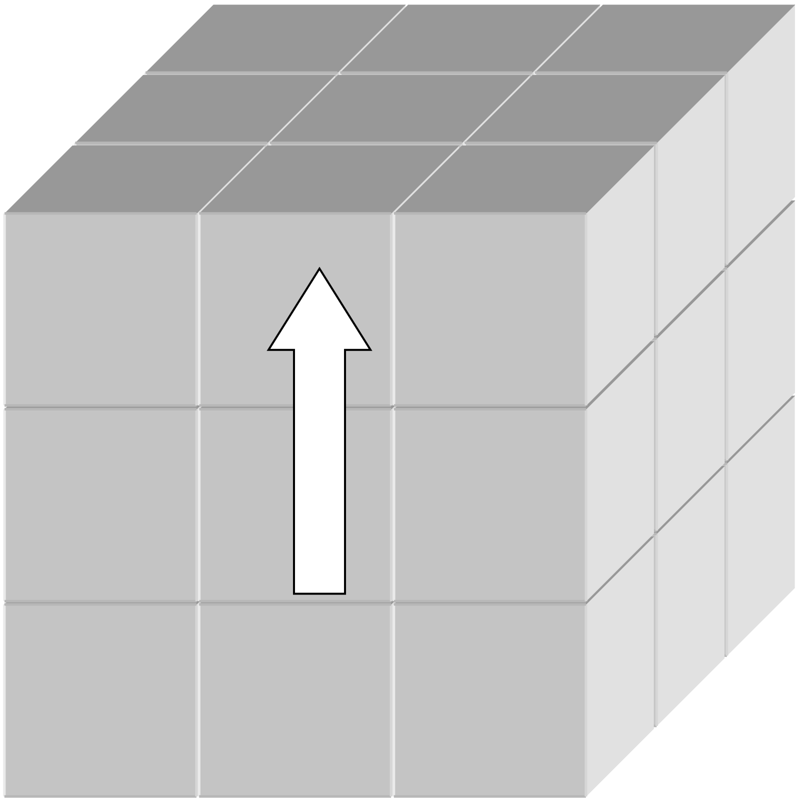


Abb. 3.6

Wir nennen die neuen Gebilde ab 3^4 einen wachsenden **Raum-Zeit-Körper**, weil der Raum mit der Zeit wächst. Wir können auch sagen, der Körper wird in Wachstumsschüben größer. Die gezählte oder vergangene Zeit wird durch die Hochzahl (Exponent) ausgedrückt. Die Hochzahl nennen wir daher auch **Zeitzahl**. Wir verwenden die Ausdrücke ‚Hochzahl' und ‚Zeitzahl' unterschiedslos. Bei der ‚Hochzahl' wird der Ort unserer Schreibweise angesprochen, bei ‚Zeitzahl' wird die Aufgabe dieser Zahl benannt, nämlich das ***Zählen der Zeit***.

Mit jedem Glockenschlag, den die Hochzahl anzeigt, ist unsere Ausdehnung um den Wert der **Grundzahl** (Basis) gewachsen (vervielfacht). Da wir die Grundzahl drei gewählt haben, hat sie die Größe der Wachstumsschübe bestimmt. Wir können daher auch sagen, die Grundzahl ist das ***Maß der Vervielfachung*** (Verdoppelung bei 2; Verdreifachung bei 3, Vervierfachung bei 4 usw.). Die Grundzahl wird auch Basis genannt.

In der Natur lassen sich unterschiedliche **Wachstumsformen** erkennen. Da gibt es beispielsweise die Zellteilungen in einem Lebewesen. Der Ursprung entspricht dann sozusagen einer Urzelle (befruchtete Eizelle). Aus ihr entstehen durch Teilung alle übrigen Zellen, die sich wieder teilen. Das sind gleichzeitig eine Zellvermehrung und ein Wachsen des gesamten Körpers.

Eine andere Sicht wäre, dass sich der jeweilige Raum-Zeit-Körper als Ganzes vervielfacht und nicht jeder einzelne Würfel mit den Abmessungen von 1 cm^3. Auch dieses Bild ist denkbar, doch die Natur empfiehlt die andere Sichtweise. Beim Wachsen von Lebewesen vervielfachen sich die Zellen und nicht schlagartig ganze Organe. Die Baupläne in den Zellkernen (Erbanlagen; DNS-Spiralen) bestimmen dabei, wie sich die Zellen beim Wachsen zueinander anordnen, zu Organen und zu einem vollständigen Lebewesen ausformen, beispielsweise einem Menschen.

Das ist ein sprunghaftes Wachsen. Wir können fast sagen in Quantensprüngen. Vorstellbar und von uns bisher angenommen ist ein stetiges Wachsen. Stetig nennen Mathematiker ‚kontinuierlich', bei sprunghaft sagen sie ‚diskret'. Auf Deutsch ist alles anschaulicher, einfacher.

Wir wählen für unsere Zwecke die einfachste Anschauung. Danach hatten sich bei jedem Glockenschlag alle Würfel von je 1 cm^3 Inhalt um den Wert der Grundzahl (hier 3) vermehrt. Wenn wir den Inhalt von Stange, Brett und Neuwürfel auszählen, sehen wir die **Übereinstimmung von zahlenmäßiger (arithmetischer) und räumlicher (geometrischer) Darstellung** der Ausdehnungsarten. Zahlenwelt und Würfelwelt entsprechen sich in gleicher Weise wie bei den ersten drei Ausdehnungsarten.

Dazu ein Zitat von Einstein: „Ein mystischer Schauer ergreift den Nichtmathematiker, wenn er von ‚vierdimensional' hört, ein Gefühl, das dem vom Theatergespenst erzeugten nicht unähnlich ist. Und doch ist keine Aussage banaler als die, daß unsere gewohnte Welt ein vierdimensionales zeiträumliches Kontinuum ist."[18]

---

[18] Einstein, Albert, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Gemeinverständlich), Braunschweig 1920, 10. Aufl., S. 37

Diese Schrift richtet sich, wie es schon im Vorwort heißt, nicht nur an jugendliche Schüler, sondern auch an Lehrer und Eltern. Und diese Erwachsenen sind, wie ich erleben durfte, sehr ungläubig und misstrauisch, wenn in der eingefahrenen Mathe neue Wege beschritten werden.

Darum habe ich im Januar 2005 einen frühen Entwurf meiner Abhandlung zur Würfelwelt dem Dekan der der mathematischen Fakultät der Uni Marburg als Email~~s~~ gesandt. Er antwortete umgehend, dass er sich freue, dass auch Laien sich mit mathematischen Grundfragen geschäftigen. Er habe daher mein Manuskript an den für diesen Fachfragen zuständigen Ordinarius weitergeleitet, der mir in Kürze seine Stellungnahme schicken werde

Am 5. Januar 2005 kam ebenfalls als Email die Antwort von Prof. Dr. Georg Schumacher: „Ihre arithmetischen Diskussionen stehen zunächst in Zusammenhang mit dem Aufbau des Zahlensystems, ausgehend von den natürlichen Zahlen. Sodann führen Sie auf einem geometrischen Wege neue Grundrechenarten ein. … In Ihrem Ansatz wird benutzt, dass die Multiplikation natürlicher Zahlen auf die wiederholte Addition zurückgeführt wird, und so auch in natürlicher Weise die Exponentialabbildung, oder besser das Potenzieren begründet. … Ihr Artikel ist ein interessanter Beitrag zur grafischen Darstellung der Raum-Zeit-Dimension.“

Angenehm überrascht und bestärkt hat mich dann ein Buch von Ian Stewart. Er gilt als der „beliebteste Mathematik-Professor Großbritanniens“ und „Mathe-Guru“. Stewart wagt am Ende seines Buches „Weltformeln 17 Mathematische Gleichungen, die Geschichte machten“ einen Ausblick: „Was kommt als nächstes?“ Er meint, das Programmieren und die digitale Welt werden womöglich die Mathe stark verändern. Er hält es für möglich, „dass wir uns von traditionellen Gleichungen insgesamt lösen sollten, insbesondere den kontinuierlichen wie den gewöhnlichen und partiellen Differentialgleichungen.“ „Die Zukunft ist diskret [sprunghaft], sie ist nur in ganzen Zahlen zu fassen, und Gleichungen sollten Algorithmen [Rechenfolgen] Platz machen – Rezepten, um Dinge zu berechnen. Statt Gleichungen zu lösen, sollten wir die Welt digital mit Hilfe von Algorithmen simulieren.“

Dann kommt Stewart ganz nah an unsere Darstellungsweise heran. Er spricht von „zelluläre Rechenautomaten“: „Es handelt sich dabei um eine Reihe von Zellen, typischerweise kleine Quadrate, von denen jede in einer Vielzahl unterschiedlicher Zustände existieren kann.“ Unsere Zellen sind keine Quadrate, sondern Würfel. Und dann kommt eine ganz pragmatische, typisch britische Schlussfolgerung: „Es zählt, welches [Rechensystem] am effektivsten Probleme löst und Einsichten liefert.“

Stewart schlägt auch eine Brücke von der reinen Mathe zur Natur: „Andererseits ist es völlig glaubwürdig, dass wir schon bald neuartige Naturgesetze finden könnten, die auf diskreten digitalen Strukturen und Systemen beruhen.“[19]

3.3 Die anschauliche Würfelwelt

Die bisherige Darstellung der Ausdehnungsarten hat einen großen Schönheitsfehler. Sie hat Systembrüche. Der Übergang vom Ursprung zur Linie, von der Linie zur Fläche, von der Fläche zum Raum und vom Raum zum wachsenden Körper stellt jedes Mal einen gedanklichen Umsturz dar. Wir müssen in jeweils völlig unterschiedlichen Darstellungsarten und Gebilden denken. Vom Punkt springen wir in die Linie, dann in die Fläche und schließlich in den Raum, der ja schon im Punkt stecken soll (1^3) (siehe oben 3.1). Andererseits wird der Punkt auch als „undefinierbarer Grundbegriff“ bezeichnet, und eine Linie als die Bahn eines bewegten Punktes. Mathematiker sagen auch, die Linie ist ein abstraktes eindimensionales geometrisches Gebilde. Das sind alles unklare Ausreden dafür, dass man sich nichts Genaues vorstellen kann. Man hat es nicht „begriffen“.

Doch wenn im Punkt schon der Raum steckt (1^3), warum dann nicht auch in der Linie und in der Fläche, die aus dem Punkt herausgewachsen sind? Und wenn die Linie und die Fläche überhaupt keine räumliche Ausdehnung hätten, dann könnten wir sie gar nicht sehen.

In der Mathematik und den Naturwissenschaften sucht man nach Einfachheit, Klarheit und Eleganz. Ein bekanntes Buch hat den Namen ‘Das elegante

[19] Stewart, Ian, Weltformel, 17 mathematische Gleichungen, die Geschichte machten, Reinbek bei Hamburg, 2014, S. 503 ff.

Universum'[20]. Wie können wir nun vom Punkt bis zum wachsenden Würfel die vier **Ausdehnungsarten fließend und ohne Brüche** darstellen? Wie können wir sie so ineinander übergehen lassen, dass sich das eine aus dem anderen ganz nahtlos und geradezu denknotwendig ergibt? Und ein Blick voraus: So elegant könnte es auch im Weltall ablaufen.

Wir haben dazu schon einige gedankliche Vorarbeiten geleistet. Denn wir haben bereits die Vorstellung des **Wachsens** auf die ersten drei Ausdehnungsarten angewandt. Und nun verbinden wir dies mit unseren oben erläuterten Erkenntnissen über den Punkt bzw. den Ursprung. Wie erwähnt fand der Mathematiker David Hilbert (1862 - 1943) heraus, dass ein Punkt auch aus einem Zahlenpaar (Punkt der Ebene: 1^2) oder aus einer Zahlen-Dreiheit (Zahlentripel - Punkt des Raumes: 1^3) oder ganz allgemein aus einer geordneten Zahlen-Vielheit (Zahlen-n-tupel - Punkt des viel- oder n-dimensionalen Raumes: 1^n) bestehen kann und so definiert wird. Unser Ursprung muss demnach nicht einfach 1 sein; er kann auch 1^3 sein.

Wenn wir das in unserer inzwischen vertrauten Würfelwelt räumlich darstellen wollen, dann ist schon unser Anfang oder **Ursprung** ein Würfel oder ein Punkt des Raumes von 1^3. Wir nennen ihn deshalb den **‚Urwürfel'**. Dieser Urwürfel soll die Zahl eins abbilden. Dazu müssen wir nur noch einen Maßstab auswählen. Wir nehmen wieder den Zentimeter. Unser Ursprung ist also ein Urwürfel mit Kantenlängen von einem Zentimeter: **1^3 cm³** oder in reinen Zahlen: **$1^3 = 1$**

Das bedeutet, wir stellen die Zahlen bildlich als **eine Menge von Urwürfeln** dar. Jeder dieser Urwürfel hat die Größe von 1 Kubikzentimeter.

In jedem Urwürfel stecken, wie wir schon oben sahen, alle Zahlen und damit auch die Zahl 3, und zwar in der Form 3^0. Dieser Ur-Dreier ist noch ein Urwürfel, er hat ja noch keine Ausdehnung, kein Wachstum hinter sich. Er stellt sich uns noch in der Ausdehnungsart 0 dar, also **$3^0 = 1$,** geometrisch **3^0 cm³ = 1^3 cm³ = 1 Urwürfel.** Mit der Zahl 3 als Grundzahl (Basis) wollen wir nun weiterrechnen. Sie ist in unserem Beispiel das Maß der Wachstumsschübe.

[20] Greene, Brian, Das elegante Universum, Superstrings, verbogene Dimensionen und die Suche nach der Weltformel, Berlin 2000

Der **Urwürfel** soll sich nun ausdehnen. Wir sagen er soll wachsen, also mit der Zeit größer werden. Damit führen wir in unsere Würfelwelt von Anfang an die ‚Zeit' als wichtige Bestimmungsgröße ein. Dadurch lässt sich das Modell vervollständigen und vereinheitlichen.

Als **Zeiteinheit** wählen wir wieder die **Sekunde**. Kleinere Zeiteinheiten würden für unsere Augen zu schnell ablaufen, größere wie etwa die Minute würden uns zu lange dauern, uns langweilen. Wir befehlen also: „Lieber Urwürfel! Wachse und verdreifache dich in einer Sekunde! Aus 3^0 cm^3 werde $3^{\mathbf{1}}$ cm^3!" Das Ergebnis sind jetzt drei Urwürfel in einer Reihe. Wenn wir ganz genau sein wollten, müssten wir die Hochzahl auch als Sekunde bezeichnen und schreiben: $3^{1\ sec}$ cm^3 Das wäre aber ungewohnt und vielleicht verwirrend. Wir lassen die Zeiteinheit bei der Zeitzahl weg.

Wir könnten auch unterstellen, dass das **Wachsen in Sprüngen** bei jedem Glockenschlag nach einer Sekunde erfolgt und nicht stetig abläuft. Beides könnten wir uns vorstellen. In der Natur ist das Wachsen oft mit plötzlich eintretenden Zellteilungen verbunden. Auch aus der Physik kennen wir die Quantensprünge; und die werden wir noch brauchen.

Wir gehen nun davon aus, dass unser Urwürfel wie oben der Punkt in gerader Richtung um die Zahl drei wächst, sich ausdehnt bzw. verlängert. (Ob er dabei hupft oder schleicht, ist uns egal.) Bei unserem Urwürfel sind also aus der rechten Seitenwand zwei weitere Urwürfel herausgewachsen. Damit ist bei uns diese erste Ausdehnungsart nicht mehr eine Linie, sondern eine Stange aus drei Urwürfeln. Wir nennen sie die **Urstange**, weil sie in unserer Würfelwelt die ***erste Ausdehnungsart*** darstellt und weil wir sie mit der ersten Dimension und einer Linie gleichsetzen (siehe unten Abb. 3.7). Die Bezeichnung Urstange dient auch zur Unterscheidung von späteren Stangen, wie wir sie bereits oben kennen gelernt haben (z. B. 3^4).

Mathematisch ist diese Darstellungsart gerechtfertigt. Sie widerspricht nicht den Gesetzen der Arithmetik, weil gilt:

$$3 \times 3^0 = 3 \times 1^3 = 3 \times 1 = 3 = 3^1$$

$$3 \times 3^0\ cm^3 = 3 \times 1^3\ cm^3 = 3 \times 1\ cm^3 = 3^1\ cm^3$$

Wenn unsere Uhr die zweite Sekunde schlägt, dann soll der nächste Wachstumsschub erfolgt sein: „3^1 wachse zu 3^2!“ In dieser ***zweiten Ausdehnungsart*** wächst nun die Urstange zu einem Brett. Wir stellen uns vor, dass bei der Urstange mit dem zweiten Glockenschlag die hintere der 3 cm langen Seitenwände einen Wachstumsschub erlebt hat. Die Urstange sich dabei verdreifacht. Wie früher die Gerade zur Fläche wurde, so wird jetzt die Strange zu einem quadratischen Brett. Wir nennen es das **Urbrett** und es stellt die zweite Ausdehnungsart in unserer Würfelwelt dar. (Es wird euch sofort einleuchten, wenn ihr unten die Abb. 3.7 anschaut.)

Wir schreiben

für die Zahlenwelt: $3^1 \times 3^1 = 3^2 = 9$

und

für die Würfelwelt: $3^1 \times 3^1$ cm³ = 3^2 cm³ = 9 cm³

Wir haben dabei sogar die erste Potenzregel gefunden: Zahlen mit Hochzahlen (Potenzen) werden bei gleicher Grundzahl miteinander multipliziert, indem man die Hochzahlen zusammenzählt (addiert). Das wird im Abschnitt ‚6 Einige Regeln für die 7 Rechenarten’ unter 6.2.3 genau erläutert. Schon hier zeigt sich, auch das ist kein Hexenwerk, sondern leicht vorstellbar.

Dieses Wachstum lässt sich in der ***dritten Ausdehnungsart*** fortsetzen. Unser Urbrett erhält mit dem dritten Glockenschlag den Befehl: „Wachse um das Dreifache nach oben!“ Es soll ähnlich sein wie bei der Fläche, die zu einem Würfel wurde. Und schau an: Aus dem Urbrett ist nun der bekannte, der **klassische Würfel** geworden; den kennen wir schon lange. Er hat die Seitenlängen von 3 cm und den Inhalt von 27 Urwürfeln.

In der Zahlenwelt: $3^1 \times 3^1 \times 3^1 = 3^3 = 27$

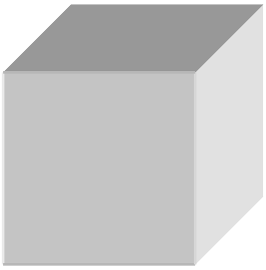
In der Würfelwelt: $3^1 \times 3^1 \times 3^1$ cm³ = 3^3 cm³ = 27 cm³ (klassischer Würfel)

Wenn dieser klassische Würfel nach dem 4. Glockenschlag weiter wächst und zu einer dreimal so großen Würfelstange wird, haben wir die **vierte Ausdehnungsart**

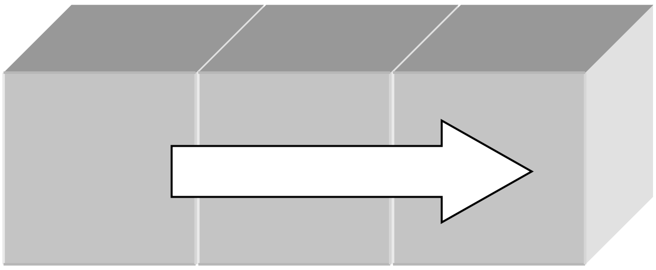
(3^4) dargestellt. Damit lassen sich auch alle folgenden Ausdehnungen (3^5, 3^6, 3^7 …) abbilden.

Alle Ausdehnungsarten gehen so nahtlos ineinander über. Sie sind nach einer einheitlichen Regel aus dem Urwürfel herausgewachsen. Und unsere **Würfelwelt** zeigt die dabei entstandenen Gebilde (Würfel, Stangen, Bretter und wieder Würfel). Dieses Wachstum lässt sich beliebig, unendlich fortsetzen.

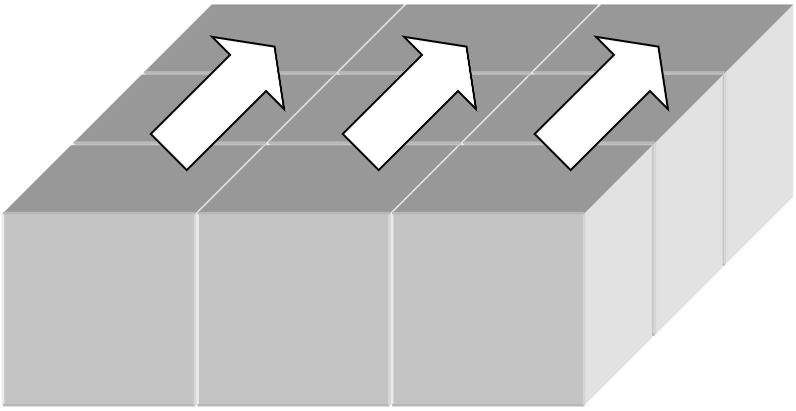
Die folgende Abbildung 3.7 zeigt die Würfelwelt von 3^0 bis 3^3. (Oben zeigt Abb. 3.4 den 4. Wachstumsschub: 3^4)



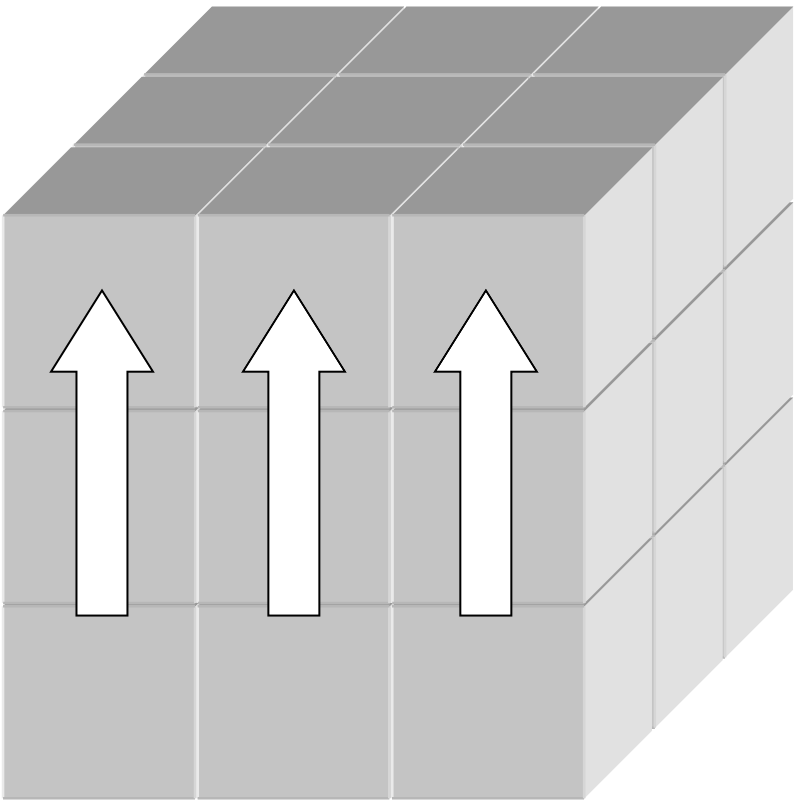
$3^0 = 1$



$3^1 = 3$



$3^2 = 9$



$3^3 = 27$

3.4 Das Zehnersystem in der Würfelwelt

Wir rechnen nicht mit 3 Fingern, sondern mit 10. Unser **Ziffernsystem** mit der **Grundzahl 10** beruht auf dem Zählen mit 10 Fingern. Das ist für die Menschen sehr eingängig und hat sich dadurch weltweit durchgesetzt. Es ist uns so geläufig, dass wir es hier nicht näher erläutern wollen. Alle Zahlen, die wir bisher gebraucht haben, wurden im Zehnersystem geschrieben; es wird auch Dezimalsystem oder dekadisches System genannt.[21] Die Römer gebrauchten ein Ziffernsystem aus Buchstaben, dort schrieb man z.B. 1989 = MCMLXXXIX. Das ist sehr umständlich.

Wir können das **Dezimalsystem** auch **in Potenzen**, also mit Hochzahlen schreiben. Das ist nützlich, wenn es um sehr große oder sehr kleine Zahlen geht. Dann werden die neun Nuller, die z.B. eine Milliarde hat, durch die Ziffer 9 als Hoch- oder Zeitzahl ausgedrückt: 1.000.000.000 = 10^9. Denn **nach 9 Glockenschlägen** ist bei der Grundzahl 10 die Milliarde das Ergebnis. Dabei ist nach dem 1. Glockenschlag aus dem Urwürfel die Grundzahl (10^1) herausgewachsen. Diese Schreibweise ist nach einer gewissen Gewöhnung bei großen und kleinen Werten übersichtlicher und einfacher.

In unserer Würfelwelt bedeutet dies, dass im Einser auch die Grundzahl Zehn steckt, und zwar als 10^0. Wir lassen dann aus dem Einser, dem Urwürfel, beim ersten Glockenschlag die Zahl Zehn herauswachsen; der Urwürfel verzehnfach sich. Dies schreiben wir nun 10^1. Wenn sich alle 10 Urwürfel wieder verzehnfachen, haben wir 100 Urwürfel ($10^1 \times 10^1 = 10^2 = 100$). Die 1. Potenzregel: Hochzahlen addieren!

Schauen wir uns nun das **Zehnersystem in beiden Schreibweisen** genau an:

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1.000$

...

$10^9 = 1.000.000.000$ (1 Milliarde)[22]

usw.

---

[21] Decem (lateinisch) bedeutet 10, ebenso deka (griechisch). In Österreich sind 10 gr. ein Deka.

[22] In Frankreich und USA heißt die Milliarde „Billion“. Dort ist 10^9 = 1 Billion. Sonst ist die Billion 10^{12}

Wir sehen, die Anzahl der Nuller und die jeweiligen Hoch- bzw. Zeitzahlen entsprechen sich. Doch die Hochzahlen erleichtern das Lesen – und (!) Rechnen. Wir müssen die Nuller nicht abzählen, sondern erhalten sie in einer Ziffer angezeigt. Die Welt soll rund 14×10^9, also 14 Milliarden Jahre alt sein. Doch das ist kein Alter, wenn wir von den viel größeren Billionenbeträgen der heutigen Weltwirtschaftskrisen und Staatsverschuldungen hören. Allein eine Bank (Hypo Real Estate) benötigt 100 Mrd. € (also 100×10^9 € oder $10^2 \times 10^9$ € = $10^{2+9} = 10^{11}$ €) Staatshilfe – vorläufig!

Nun können wir in der gleichen Weise auch **sehr kleine Zahlen** darstellen. Das ergibt folgendes:

10^{-1} = 0,1 = 1/10 1 Zehntel

10^{-2} = 0,01 = 1/100 1 Hundertstel

10^{-3} = 0,001 = 1/1.000 1 Tausendstel

…

10^{-9} = 0,000 000 001 = 1/1.000.000.000 (1 Milliardstel oder 1 Nano)

usw.

In der Physik und in der heutigen Mikrotechnik wird viel mit milliardstel Metern gerechnet. Diese Längeneinheit heißt Nanometer (nm) und es gilt: 1 nm = 10^{-9} m. Die Nanotechnologie hat daher ihren Namen.[23] Sie gilt als eine der Schüsseltechnik des 21. Jahrhunderts.

Damit sind wir zu einer Anwendung der Zahlen im täglichen Leben vorgestoßen. Nutzen wir also unsere bisherigen Erkenntnis zu einem gewissen Verständnis von Raum und Zeit, von Urknall und Weltall. Das ist dann Bildung, also Weltverständnis. Das führt zum nächsten Abschnitt ‚Vom Würfel zum Weltall'. Dort wollen wir uns mit sehr großen und sehr kleinen Ausmaßen beschäftigen. Wir wollen uns die Nützlichkeit unserer bisherigen Erkenntnisse veranschaulichen und sie vertiefen. Wir wollen schauen, ob die ganz abstrakte Zahlenwelt und das Weltall Ähnlichkeiten aufweisen, ob wir das uns mit der Würfelwelt veranschaulichen können. Beginnen wir mit dem Ursprung der Zahlenwelt, des Lebens und des Weltalls.

[23] ‚Nanos' ist griechisch und heißt der Zwerg.

3 Vom Würfel zum Weltall

Schon im ersten Abschnitt „In der Praxis hat nur das Einfache Erfolg“ haben wir erkannt, dass abstrakte Erkenntnisse durch die Anwendung spannend und verständlich werden. Damit wollen wir nun beginnen. Die Würfelwelt hilft uns, das Weltall nicht mathematisch-wissenschaftlich zu berechnen, wohl aber es uns bildungsmäßig besser veranschaulichen zu können. Das wollen wir tun, bevor wir uns die höheren Rechenarten mit Würfeln begreifbar machen.

4.1 Der geheimnisvolle Ursprung

Die Zahlenwelt (Arithmetik) ist die **höchste Stufe der Verallgemeinerung** oder Abstraktion[24]. Sie sieht von allem Besonderen, Einzelnen oder von sinnlich wahrnehmbaren Formen und Gestalten ab. Keine cm oder andere Maßeinheiten, keine Würfel oder sonstigen Gebilde werden hier betrachtet; es wird nur mit ganz allgemeinen, auf alle Fälle anwendbaren Zahlen und Rechengesetzen gearbeitet. Die letzte und höchste Verallgemeinerung ist die reine, die nackte Zahl.

Darum ist Mathe für viele so schwer. Sie können sich nichts Greifbares und Anschauliches darunter vorstellen. Diese reinste aller Wissenschaft entgleitet schnell unseren Händen. Daher haben wir die Würfel in die Hand genommen und uns daran die Ausdehnungsarten, die Dimensionen und ihren Ursprung im Urwürfel veranschaulicht. Wir werden uns mit dieser Würfelwelt später noch die wichtigsten Rechenarten, vom Addieren bis zum Logarithmieren, begreifbar machen.

Doch zuvor müssen wir uns folgendes klar machen. Jedes Zählen oder die Anwendung der Zahlen setzt eine **Verallgemeinerung** oder Abstraktion voraus. Es werden vergleichbare Dinge zusammengefasst und erhalten einen gemeinsamen Namen. Wir sehen also von bestimmten persönlichen oder individuellen Eigenheiten ab und fassen gleichartige Sachen zusammen, um sie zusammenzuzählen oder sonst mit ihnen rechnen zu können. Wir können hier auch von Begriffsbildungen oder Definitionen sprechen. Die in Jahrtausenden gewachsene Logik unserer Sprache arbeitet damit ebenso wie wissenschaftliche Systembildungen und Klassifizierungen (z. B. bei unseren Pflanzen- und Tierarten). Konfuzius wurde einmal gefragt: „Meister, was müssen wir tun, um den Staat zu ordnen?“ Er antwortete: „Wir müssen die Begriffe klären!“ Und Begriffe kommen von ‚begreifen’, anfassen.

Oft heißt es, wir dürften nicht Äpfel und Birnen zusammenzählen. Das ist richtig. Erst wenn wir Äpfel und Birnen unter dem Begriff ‚Kernobst’ in einen Topf geworfen haben, können wir sie auch zusammenzählen. Unter dem nächsten Oberbegriff ‚Obst’ können wir dann auch Steinobst (z. B. Kirschen und Zwetschgen) und alle sonst denkbaren Obstsorten wie Ananas und Kiwi mitzählen und dadurch mit ihnen rechnen. Allerdings gehört Gemüse noch nicht dazu. Dafür wird z. B. noch der Begriff ‚Nutzpflanzen’ benötigt.

Mehr noch: Wir können auch sagen, unser Einser und all die anderen Zahlen können **jede Art von einem Etwas** darstellen oder vertreten. Es muss nur begrifflich richtig bzw. passend festgelegt werden, was jeweils darstellt werden sollen. Das ist dann die Anwendung der Zahlen auf die wirkliche Welt beim Rechnen. Eine große Verallgemeinerung und zahlenmäßige Gleichsetzung von Dingen aller Art erfolgt seit alters über das Geld. Durch die Preise werden alle Waren und Dienstleistungen wertmäßig vergleichbar und berechenbar. Kaufleute, Buchhalter, Betriebswirte müssen schon immer besonders viel rechnen.

Das alles zeigt: Mathe und anschauliches Denken sind also kein Gegensatz, im Gegenteil. Wir können noch anschaulicher Denken, wenn wir die Mathematik dabei gezielt einsetzen. Und umgekehrt verstehen wir die Mathe besser, wenn sie uns in anschaulicher Form angeboten wird. Das zeigen auch die folgenden Beispiele.

Auch die Würfelwelt hat noch Nachteile. Würfel sind immer noch recht allgemeine, uninteressante Gebilde. Die Nützlichkeit der Würfelgesetze leuchtet umso mehr ein, je besser wir mit ihnen die Natur und unsere Welt verstehen können. „Etwas Lebendiges will ich haben“, sagte das Rumpelstilzchen. Darüber hinaus muss unser Neugiertrieb angestachelt sein, wenn wir mit Lust und Leistung forschen und lernen

[24] Abstraktion (lat. abstrahere = wegziehen, abziehen) heißt „absehen“ von allem Besonderen, Einzelnen, Greifbaren, um zum Allgemeinen, ganz Grundsätzlichen, Gegenstandslosen zu gelangen.

wollen. Und es fällt jedem von uns leichter, sich allgemeine Gesetze zu merken, wenn wir uns dazu **spannende Anwendungen** vorstellen können.

Solch ein spannendes Thema ist seit dem Altertum und hier besonders bei den alten Griechen die **Frage nach dem Ursprung, dem Atom und dem Punkt.** Was alles steckt darin oder dahinter? Und wir fügen hinzu: Wie geheimnisvoll ist die **Zahl eins**, der Ursprung der Zahlenwelt? Einiges dazu kennen wir bereits. Wir wollen uns hier daran erinnern.

Wir Menschen stoßen dabei zuerst auf unseren eigenen Ursprung, den Beginn unseres persönlichen Lebens. Darüber wissen wir heute schon einiges. Vergleichen wir also die verschiedenen Anfänge miteinander! Schauen wir abwechselnd **vom Allgemeinen auf das Besondere und umgekehrt.**

Denken wir zunächst daran, dass auch wir selbst aus einem einzigen Urkörper, nämlich einer einzigen befruchteten **menschlichen Eizelle** herausgewachsen sind. Das ist unser Ursprung. All unsere heutigen Zellen und Organe waren dort in den Erbanlagen, die wir auch Gene nennen, eingeschlossen. In dieser einen Urzelle eines Lebewesens stecken alle Informationen, der ganze Bauplan, damit ein Mensch mit seinem Wuchs und seiner äußeren Erscheinung, seinen Fähigkeiten und Begabungen entstehen kann. Die Genforschung fördert hier ständig neue Einsichten zu Tage. Und da in jeder unserer Zellen alle Erbinformationen (DNS-Kode) stecken, können wir jede Zelle auch mit einem kleinen Urwürfel vergleichen. Mehr noch, wir können an solch einer Zelle (z.B. in einem gefundenen Haar) feststellen, zu welchem Mensch sie gehörte. So werden heute Verbrecher ermittelt.

So stecken auch in der **Zahl 1 und im Urwürfel** alle Zahlen in ursprünglicher, noch nicht gewachsener Form (denn es gilt: $1^0 = 2^0 = 3^0 = 10.000^0 = 1$). Außerdem steckt in der Grundzahl die künftige Größe der Wachstumsschübe, d.h. die künftigen Vervielfachungen. Es wird angezeigt, ob verdoppelt (2^0) oder verdreifacht (3^0) usw. wird. Die Grundzahl bestimmt, wie gezeigt wurde, aber nicht die Maßeinheiten. Steht 3 für 3 cm oder 3 km? Den Maßstab können und müssen wir frei wählen, ebenso die Zeiteinheit (z.B. Sekunde) für die Glockenschläge. Wir müssen also auch ein Zeitmaß (z.B. sec) für die Hoch- und Zeitzahl (Exponent) festlegen. Und damit ist in der Zahl 1 auch die Zeit eingesperrt (denn es gilt auch: $1^0 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^{10.000} = 1$). Beides, die Größe der einzelnen Wachstumsschritte (Grundzahl, z.B. in cm) und die Geschwindigkeit des Zeitablaufs (Zeitmaß, z.B. in sec) bestimmen das künftige Wachstum in der Würfelwelt.

In der Zahl 1 sind auch noch **alle Ausdehnungsarten** (Dimensionen) eingepackt. Denn ich kann 1 nicht nur als Punkt zeichnen. Eine Strecke von einem Zentimeter Länge stellt ebenfalls die Zahl eins dar ($1^1 = 1$); und ein Quadrat mit der Seitenlänge 1 cm ($1^2 = 1$) ist genauso ein Einser wie ein Würfel mit den Seitenlängen von einem Zentimeter ($1^3 = 1$). Unser Ursprung kann also eine Strecke, eine Fläche oder ein Raum sein. Und dieser Ursprung kann auch jeweils weiterwachsen als Linie, Fläche oder als Raum-Zeit-Körper. Es kommt eben darauf an, welche Befehle erteilt werden. Im Ursprung stecken also auch die Anlagen zu recht unterschiedlichen geometrischen Gebilden oder Körpern. Das meint auch Ian Stewart, wenn er sich für künftige Rechenvorgänge „zelluläre Automaten“ und ihre Wirkungsweise vorstellt: „Die Zellen wechselwirken mit ihren Nachbarzellen nach festen Regeln.“[25]

Der **Ursprung** unserer Zahlen oder Ausdehnungen ist dabei **nicht null**, sondern **eins**! Wir können auch sagen, all dies ist in der Zahl 1 in aufgewickelter Form vorhanden. Von ‚aufgewickelten Dimensionen' sprechen heute auch die Erforscher des Weltalls, die sich Kosmologen nennen und über die wir gleich noch sprechen werden. Sie suchen derzeit eifrig nach den kleinsten Elementarteilchen und dem winzig kleinen Ursprung des Weltalls.[26]

Auch die Natur hat sehr unterschiedliche Größen und Formen für ihre Ausgangspunkte, die Eizellen oder Samenkörner gewählt. Eine menschliche Eizelle hat einen Durchmesser von 0,1 – 0,2 mm. Sie ist mit bloßem Auge nicht zu sehen. Das Ei vom Vogel Strauß ist im Vergleich dazu sehr groß. So können wir uns also merken, dass auch die Natur für die Urzellen sehr verschiedene Maßstäbe und Formen gewählt hat. Das entscheidende Merkmal des Ursprungs, der Dimension 0 besteht darin, dass **noch keine Ausdehnung, kein größer Werden oder**

---

[25] Stewart. Ian, Weltformeln, a.a.O., S. 504

[26] vgl. z.B. für das große Weltall: Greene, Brian, Das elegante Universum, Berlin 2006; und für die ganz kleinen Teilchen: Ne'eman, Yuval und Kirsh, Yoram, Die Teilchenjäger, Heidelberg 1995

Wachstum stattgefunden hat; hier haben wir vielmehr den Ausgangspunkt für solch eine Entwicklung gefunden.

Genauso aufregend und fesselnd wie die Erforschung der Gene ist heute die Suche nach dem **Ursprung des Weltalls**. Wie groß war der Ursprung oder die Urzelle des Kosmos? Auch dabei werden uns laufend neue Erkenntnisse geboten. Es werden Urfragen der Menschheit gestellt und teilweise auch beantwortet. Allerdings entspringen aus jeder Antwort sogleich tausend neue Fragen, sodass unser Wissensdurst nie befriedigt sein wird; die Forschungsaufträge werden uns nie ausgehen. Wir werden nie allwissend werden, allwissend kann nur Gott sein.

In der Physik gibt es heute allgemein anerkannte Theorien und Annahmen über die Entstehung des Weltalls. Sie sind seit der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts im **'Standardmodell der Kosmologie'** zusammengefasst worden.[27] Danach entsprang unser heutiges Universum vor etwa 13,7 Mrd. Jahren in einem 'Urknall' aus einem winzigen Ursprung. Dabei verwandelte sich eine ungeheuer große Menge von zusammengepresster Energie in weniger als einer billionstel Sekunde (10^{-12} sec.) in Materie. Es entstand eine Raum-Zeit-Blase, die sich schnell ausdehnte. Noch heute ist nach diesem Modell unser Weltall ein sich ständig, und zwar immer schneller ausdehnender Raum-Zeit-Körper. Dieses 'Urknallmodell' beruht auf zwei Säulen der heutigen Physik. Es ist die Relativitätstheorie von Albert Einstein. Sie beschreibt die Geometrie des sich schnell ausdehnenden Raumes.[28] Zum zweiten ist es die auf Max Planck zurückgehende Teilchen- oder Quantenphysik, die sich mit den Vorgängen im ganz Kleinen und damit ebenfalls mit der Umwandlung von Energie in Materie beschäftigt.[29]

Diese Vorstellung vom Ursprung unseres Weltalls passt gut zu unserer wachsenden Würfelwelt. Dieses Modell stellte aber einige **vorherigen Annahmen** auf den Kopf. Denn davor hatte die Wissenschaft ein völlig anderes, auf **Isaac Newton** (1643 – 1727) zurückgehendes Weltbild vor Augen. Danach waren Zeit und Raum schon

[27] vgl. dazu die gute und verständliche Zusammenfassung bei: Landua, Rolf, Am Rande der Dimensionen. Gespräche über die Physik am CERN, Frankfurt / M. 2008; oder umfassender und schwieriger: Weinberg, Steven, Die ersten drei Minuten, der Ursprung des Universums, München 1980

[28] Dabei hat Einstein lange das Modell des wachsenden Universums abgelehnt.

[29] Genau das soll u.a. am CERN in Genf beobachtet und nachgewiesen werden (vgl. Landua).

immer vorhandene, vorgegebene und unverrückbare Größen. Innerhalb dieses stehenden und vorgegebenen Rahmens spielten sich die Gesetze der klassischen Physik ab. Auch sie waren unveränderlich und immer gültig. Gleich einem Uhrwerk lief danach das Geschehen im Weltraum ab. Pierre Simon Laplace (1749 – 1827) hat in seinem klassischen Werk ‚Das System der Welt' (1796) und in seinem fünfbändigen Buch ‚Die Mechanik des Himmels' (1799 – 1825) diese Vorstellungen äußerst populär gemacht. Außerdem wurde die Ansicht vertreten, dass die Physik inzwischen an die Grenzen ihres Wissens gelangt sei und nahezu alles verstehe. Als Max Planck Physik studieren wollte, wurde ihm deshalb davon abgeraten. In dieser Wissenschaft sei nicht mehr viel Neues zu entdecken.

Max Planck (1858 – 1947) folgte dem Rat nicht und wurde einer der Wegbereiter der Quantenphysik, die zusammen mit der Relativitätstheorie von **Albert Einstein** (1879 – 1955) das alte, so fest geglaubte Lehrgebäude zusammenstürzen ließ. Sogar die strenge Gesetzmäßigkeit zwischen Ursache und Wirkung, die die klassische Physik beherrschte, gilt in der Quantenphysik nicht mehr. Der Zufall regiert in diesem Reich der Mikroteilchen. Das war selbst für Einstein zu viel; und er kam daher zu seinem berühmten, später auch von ihm bedauerten Ausspruch: ‚Gott würfelt nicht!'

Mehr noch: In der Quantenwelt verschwinden einzelne winzige Materieteilchen oft rein nach dem Zufallsprinzip, andere tauchen urplötzlich auf. Wenn nun auf einmal alle und damit das ganze Weltall verschwinden würden, wäre dies weniger ein Verstoß gegen die Naturgesetze, sondern nur einer gegen unsere Erfahrung und die Wahrscheinlichkeit. Wahrscheinlich ist aber gerade nicht sicher. Das passte gar nicht zur ‚Mechanik des Himmels' von Laplace.

Das heutige Standardmodell zum Weltall hilft uns, auch einige Aussagen zur Würfelwelt besser zu verstehen. Dies gilt zunächst für den ‚geheimnisvollen Ursprung'. Sowohl die Physiker, die die kleinsten Dingen der Materie erforschen, die ‚Teilchenjäger', als auch jene, die das größte, nämlich das wachsende Weltall beobachten, beschäftigen sich heute ganz angestrengt mit dem **‚Punkt'.** Das Kleinste und das Größte hängen nämlich ganz eng zusammen. Im Mittelpunkt der heutigen Physik steht die Frage nach der ‚Weltformel'. Darin wollen die Physiker die Quantentheorie, die sich mit dem kleinsten Geschehen beschäftigt, mit der

Relativitätstheorie verbinden, die die Gesetze von Raum und Zeit, von Licht und Schwerkraft im großen Weltall beschreibt. Bis jetzt ist dies noch nicht gelungen.

Für die Teilchenjäger sind heute die **kleinsten Teilchen** die Quarks, Elektronen und Neutrinos. Sie haben eine Ausdehnung von höchstens 10^{-19} m, etwa ein Zehntausendstel des Durchmessers eines Atomkerns. Viele sehen sie deshalb als elementar, nicht mehr teilbar und damit als punktförmig an. Sie werden daher auch Elementarteilchen genannt. Punkt steht hier also für den kleinsten Materiebaustein.

Ob dieser winzige Baustein sich aber wirklich als ein **ausdehnungsloser Punkt, eine Linie oder einen Körper** darstellt, ist unbekannt. Die String-Theorie, die mit Nachdruck die Weltformel sucht, geht inzwischen davon aus, dass die Strings doch nicht punktförmig sind, sondern Linien darstellen. Und inzwischen erinnern sich sogar wieder moderne Physiker an die Pioniere der Quantenphysik: „Vor langer Zeit haben einige der klügsten Köpfe unter den theoretischen Physiker – Pauli, Heisenberg, Dirac, Feyman und andere – tatsächlich die Hypothese geäußert, die Bausteine der Natur seien möglicherweise keine Punkte, sondern kleine wellenförmige ‚Tröpfchen' oder ‚Klümpchen'."[30] Das passt gut zu unseren Überlegungen und zur Würfelwelt.

Schon einer der Wegbereiter der modernen Quantenphysik, der erwähnte Max Planck, hat sich recht nah an den ‚Ursprung' herangetastet. Er bestimmte ein kleinstes Längenmaß, das Planck-Länge genannt wird. Heutige Physiker vermuten hier sogar das **‚Urmaß' der Natur**.[31] Diese Länge ist winzig klein. Der Physiker Brian Greene veranschaulicht es so: „Wenn wir ein Atom auf das Ausmaß des uns bekannten Universums vergrößern, würde die Planck-Länge kaum die Höhe eines durchschnittlichen Baumes erreichen."[32]

Und wieder drängt sich eine Parallele zum Urwürfel auf. Die Plank-Länge enthält auch die Zeit als Rechengröße. Denn die Planck-Länge ist das Produkt aus Plank-Zeit mal Lichtgeschwindigkeit im Vakuum. Die Planck-Zeit ist danach die Zeitspanne von ungefähr 10^{-42} sec nach dem Urknall. Während dieser Zeit gelten die bekannten,

[30] Greene, Brian, Das elegante Universum, a.a.O., S. 188 f
[31] Barrow, John D., Das 1x1des Universums, neue Erkenntnisse über die Naturkonstanten, Frankfurt / M. 2004

klassischen physikalischen Gesetze noch nicht, sagen die Physiker heute. Planck hat nicht nur Werte für diese Länge und diese Zeit, sondern auch für die entsprechende Temperatur (Planck-Temperatur) und die Masse (Planck-Masse) gefunden. Erstaunlicherweise setzte er all diese Werte als **‚natürliche Einheiten' jeweils gleich Eins**. Dabei wird die Planck-Länge als die kleinste sinnvoll beschreibbare Länge mit $1{,}616199 \times 10^{-35}$ m angenommen.

Aus so einem **winzigen Ursprung**, der allerdings eine ***ungeheure Energie und Hitze*** besaß, ist nach den Vorstellungen der heutigen Physiker unser Weltall entsprungen. Im Jahre 2001 hat das Buch, des bekannten britischen Physikers und Mathematikers Stephen William Hawking (geb. 1942) ‚Das Universum in der Nussschale' für Aufsehen gesorgt. Doch wir sollten uns nicht vorstellen, dass der Ursprung unseres Universums so groß wie eine Nussschale war, er war viel, viel kleiner.

Wir sind bei unserer Würfelwelt immer von einem Urwürfel und damit von einem Raum-Zeit-Körper als Ursprung ausgegangen. Ob dies auch für den physikalischen Ursprung unseres Weltalls gilt, ist (noch) unbekannt. Von einem geht die Weltraum-Physik allerdings heute aus: Nichts in unserem Universum kann kleiner werden, als ein solches Planck-Gebilde. Er ist tatsächlich ein letztes unteilbares Etwas.

Genauso hat schon Euklid (um 365 – um 300 v. Chr.) den Punkt in der Geometrie definiert: Ein Punkt ist ein nicht mehr teilbares Gebilde. Die String-Theorie behauptet, ein Universum, dessen kreisförmige Dimension **bis zur Planck-Länge** geschrumpft sei, könne **nicht weiter schrumpfen**. Im Gegenteil, es beginne dann wieder zu expandieren. Alle Versuche, weiter zu schrumpfen, enden in einer neuen Expansion.[33] Und an anderer Stelle schreibt der gleiche Physiker: „In diesem Anfangsmoment des Universums sind alle Raumdimensionen der String-Theorie vollkommen gleichberechtigt – alle sind sie in vollkommen symmetrischer Weise in einem mehrdimensionalen Klümpchen von Planck-Größe aufgewickelt."[34] Wir fügen hinzu: wie in einem Urwürfel. Dabei hat dieser Ursprung vielleicht auch keine

[32] Greene, Brian, Das elegante Universum, a.a.O., S. 160
[33] Greene, Brian, Das elegante Universum, a.a.O., S. 278 – vergleiche dazu auch unten: ‚9 Ausblick'
[34] Greene, Brian, Das elegante Universum, a.a.O., S. 414

Würfelgestalt, sondern eine andere oder noch gar keine festgelegte Form oder er schäumt. Und die Quantenphysiker sprechen tatsächlich von Quantenschaum.

Nach dem Urknall hat sich unser Kosmos wohl nicht in Würfelformen vergrößert. Das Weltall hat sich eher gemäß einem oft gebrauchten Beispiel wie ein Luftballon oder eine **Blase nach allen Seiten hin vergrößert**. Danach stellt das Weltall einen Raum-Zeit-Körper dar. Außerhalb unseres Weltalls gibt es weder den Raum noch die Zeit in unserem Sinne.[35] Unser Raum und unsere Zeit haben sich nämlich als wesentliche Eigenschaften unseres Weltalls mit diesem zusammen erst aufgebaut. Dabei waren und sind die ‚Zeit' und der ‚Raum' bis heute große Rätsel, mit denen sich die Menschheit seit Urzeiten beschäftigt. (Ein ewiger, schon immer vorhandener, vorgegebener und unverrückbarer Raum-Zeit-Rahmen ist vorstellbar. Isaak Newton hat ja so Raum und Zeit gesehen. Das wäre dann der noch größere Rahmen, in dem die Universen entstehen und vergehen. Doch jetzt sind wir bei der Philosophie und der Theologie.)

[35] Manche Physiker vermuten, dass es womöglich weitere, unserem Weltall vergleichbare „Parallel-Universen" gibt.

4.2 Das große Rätsel: ewige Zeit, unendlicher Raum?

4.2.1 Modelle, Hypothesen, Theorien

Bevor wir uns nun die Zeit und den Raum genauer ansehen, müssen wir noch einige grundsätzliche Fragen zum **menschlichen Denken und Erkennen** klären.

Knüpfen wir an dem an, was wir oben zur Verallgemeinerung oder Abstraktion gesagt haben. Jede Verallgemeinerung oder Begriffsbildung ist der Versuch des menschlichen Geistes, die Eindrücke und Erkenntnisse über **die Umwelt zu ordnen und zu verstehen**. Wir sehen um uns herum Lebewesen und unterscheiden zwischen Tieren und Pflanzen. Tiere wiederum teilen wir ein in Säugetiere, Vögel und Insekten. Dabei müssen wir jedes Mal zwischen den Gemeinsamkeiten und den Unterschieden abwägen. Wesentliches muss von Unwesentlichem unterschieden werden.

Wir sehen und hören eine Nachtigall, eine Krähe und einen Adler. Trotz großer Unterschiede wurden sie unter dem Oberbegriff „Vögel“ zusammengefasst, von denen wir heute wissen, dass sie direkte Nachfahren der Dinosaurier sind. Der Adler wird wiederum den Raubvögeln, die Nachtigall den Singvögeln und die Krähe den Rabenvögeln zugeordnet. Dabei zählen auch die Rabenvögel zu den Singvögeln, obwohl sie nicht singen, nur krächzen. Beim Ordnen und Systematisieren müssen wir oft mit Grenzfällen und Fragwürdigkeiten zu Recht kommen.

Bereits mit den Begriffsbildungen und Verallgemeinerungen werden wichtige und oft richtige Zusammenhänge erkannt. Spätere wissenschaftliche Erkenntnisse können diese bestätigen, widerlegen oder Anpassungen erforderlich machen. Im Großen und Ganzen haben die Menschen in ihren Sprachen die Tiere und Pflanzen so zusammengefasst und eingeteilt, wie es dann auch wissenschaftlich bestätigt wurde. Alle Vögel haben einen gemeinsamen Ursprung in den Dinosauriern, wie durch die DNA-Methode nachgewiesen wurde. Der Weg führte und führt in der Regel **von den beschreibenden über die erklärenden und zu den vorhersagenden Wissenschaften.**

Dieses verstehende Bemühen lässt sich auch gut an unseren Ausführungen zum ‚geheimnisvollen Ursprung' ablesen. Durch die Beobachtung der Himmelskörper und ihre Beschreibung stießen Wissenschaftler wie Galilei, Keppler und Kopernikus zu Erkenntnissen vor, die die Zusammenhänge in unserem Planetensystem immer genauer und überzeugender erklärten. Und heute bemüht sich die Astrophysik nachdrücklich darum, das Geschehen im ganzen Weltall von seinem Ursprung bis zu einem möglichen oder vielleicht nicht möglichen Ende vorherzusagen: Dehnt sich das Weltall ewig und unendlich aus? Oder wird es zu einem bestimmten Zeitpunkt das Wachstum einstellen, in einen Schrumpfungsvorgang übergehen und schließlich unter steter Verkleinerung in seinen Ursprung zurückkehren? Das wäre dann entfernt vergleichbar mit einem Schwarzen Loch, das alle erreichbare Materie in sich aufsaugt.

Diese wachsende und möglicherweise eines Tages wieder schrumpfende ‚Raum-Zeit-Blase' ist aber nur ein Denkmodell, mit dessen Hilfe wir uns das All vorstellen, veranschaulichen. Wir Menschen können nur in **Modellen** denken – sie es in sprachlicher, bildlicher oder mathematischer Form.[36] Dabei besteht ein Modell aus einer Reihe von Annahmen, die die Wissenschaftler **Hypothesen,** auf Deutsch ‚Vermutungen' nennen. Werden die einzelnen Hypothesen und Modelle zu einem schlüssigen und erklärenden Gesamtzusammenhang ausgebaut, so wird von einer **Theorie** gesprochen.

Unser Gehirn ist zu klein, als dass es die Wirklichkeit vollständig abbilden könnte. Auch wissenschaftliche Theorien sind solche modellhaften, **verkürzten Nachbildungen** der uns umgebenden Welt und daher eben teilweise falsch. Jede Theorie wird an irgendeinem Punkt abgebrochen. Andernfalls wäre sie ein ‚unendlicher Rückgriff' (infiniter Regress) auf all die unendlich vielen Einzelheiten der uns umgebenden Wirklichkeit. Das kann das menschliche Hirn nicht leisten.

Besonders anschaulich hat dies der amerikanische Hirnforscher Vernon Benjamin Mountcastle einmal zusammengefasst:

---

[36] Stobbe, Alfred, Gesamtwirtschaftliche Theorie, Heidelberg 1975, S. 24 (mit Verweis auf Jan Tinbergen)

> „Jeder von uns glaubt von sich selbst, dass er direkt in der Welt, die ihn umgibt, lebt, ihre Gegenstände und Ereignisse genau fühlt und in einer realen und gegenwärtigen Zeit lebt. Ich behaupte, dass dies Illusionen der Wahrnehmung sind, denn jeder von uns begegnet der Welt mit einem Gehirn, das mit dem, was ‚draußen' ist, über wenige Millionen gebrechliche sensible Nervenfasern verbunden ist. Diese sind unsere einzigen Informationskanäle, unsere lebendigen Verbindungen zur Realität. Diese sensiblen Nervenfasern sind keine high-fidelity-Empfänger, denn sie heben bestimmte Reizmerkmale hervor und vernachlässigen andere. … Empfindung ist eine Abstraktion, nicht eine Replikation der realen Welt."[37]

So bescheiden waren die Gelehrten nicht immer! Denn das **Wissenschaftsverständnis des 19. Jahrhunderts** und weithin auch des 20. Jahrhunderts ging von ganz anderen Vorstellungen aus. Der Materialismus, der Positivismus und der Rationalismus glaubten an die vollständige und richtige, an die wahre und endgültige Erkenntnis durch die Wissenschaft. Sie erlagen der von Mountcastle so schön beschriebenen Illusion.

Daher vertritt der wissenschaftliche Marxismus bis heute die ‚Widerspiegelungstheorie'. Danach fangen wir die Umwelt objektiv und richtig wie in einem Spiegel mit unserem Hirn ein. Und weil der Materialismus wie grundsätzlich die Wissenschaften des 19. Jahrhunderts an eine Uhrwerk-Physik glaubten, lässt sich auch die Zukunft voraussagen (Determinismus). Man muss nur die Gesetzmäßigkeiten richtig erkannt haben. Und dann ist der Mensch in der Lage, durch Erkenntnis der Gesetze der Natur und der Gesellschaft (einschließlich der Gesetze der Geschichte) die Vergangenheit und Gegenwart richtig zu verstehen und die Zukunft klar vorherzusagen. Danach haben marxistische Gesetze objektiven Charakter und spiegeln das ‚Wesen' einer Sache oder eines Zusammenhangs wider.[38]

---

[37] Zitiert nach Popper, Karl R. und Eccles, John C., Das Ich und sein Gehirn, München 1982, S. 312

[38] Ja, mehr noch: „Der Marxismus-Leninismus ist eine Wissenschaft … die Werke von Karl Marx, Friedrich Engels und W. I. Lenin sowie die Beschlüsse der Parteitage und Plenarsitzungen der Zentralkomitees der kommunistischen Arbeiterpartei zu kennen heißt, Vergangenheit und Gegenwart richtig zu verstehen, die Zukunft der Menschheit klar zu erkennen." Politische Ökonomie – Kapitalismus, Hg. Autorenkollektiv, vom Ministerium für Hoch- und Fachschulwesen der UdSSR als Lehrbuch anerkannt, Berlin 1973, S. 7 – So einfach ist die ‚Zukunft' nach marxistischer Vorstellung.

Karl Popper, der Begründer der **modernen Wissenschaftstheorie,** hat dem entschieden widersprochen; und war daher bei den Neomarxisten und den 1968ern arg unbeliebt. Nach Popper ist alle, auch die ‚wissenschaftliche Wahrheit' nur vorläufig. Der Wahrheitsbeweis (Verifikation) ist unmöglich. Trotzdem gibt es die ‚Wahrhaftigkeit', das ist die eigene ehrliche Überzeugung ohne Lug und Trug. Aber auch sie ist widerlegbar (falsifizierbar). Mehr noch, eine Theorie, die nicht überprüfbar und damit nicht falsifizierbar ist, ist unwissenschaftlich. Es muss das wissenschaftliche Experiment möglich sein. Dadurch kann eine Annahme widerlegen oder auch bestätigen werden. Doch in einer anderen Versuchsanordnung, unter anderen Modellvorstellungen kann der Zusammenhang sich ganz anders darstellen; zu einer völlig neuen Theorie führen.

Das gilt **auch für mathematische Modelle**. Dafür liefert die Physik viele Beispiele. Die längste Zeit der Geschichte glaubten die Menschen, dass die Erde eine Scheibe sei. Im Osten geht die Sonne auf und im Westen geht sie unter. Nachts wandert sie auf der Rückseite dieser Scheibe wieder nach Osten, um dort erneut aufzugehen. Im Mittelpunkt steht die Erde und um diese kreist die Sonne. Das wurde alles mathematisch genau berechnet und daraus wurden über Jahrtausende die Kalender gefertigt.[39] Seit Galilei, Kopernikus und Keppler wissen wir, dass es umgekehrt ist. Die Erde ist nicht nur eine Kugel, sie kreist auch um die Sonne und dreht sich dabei um die eigene Achse. Inzwischen wissen wir, dass es in unserem Sternhaufen, der Milchstraße, Milliarden von Sonnen mit umkreisenden Planeten gibt. Wir wissen sogar, dass es Milliarden von Milchstraßen gibt, die wir Galaxien nennen. Vieles wissen wir aber noch nicht; und ich bin sicher, vieles werden wir nie erfahren, weil wir kleine Menschlein mit einem kleinen Hirn sind.

Trotzdem ist ein unvollständiges Bild oder Modell der Wirklichkeit besser als keines. Denn so beginnt der Mensch vertieft über sich und seine Umwelt nachzudenken. Und erst wenn er Modelle und Theorien hat, kann er diese durch einen ständige Forschungs- und Denkanstrengungen verbessern und damit mehr von der Natur und seiner Kultur verstehen. Er erlangt Bildung, das ist schlicht Weltverständnis.

[39] Noch ein Beispiel: z. Z. Newtons wurde die Bahn eines Planeten aufwendig berechnet. Er wird am Himmel immer langsamer, hält plötzlich und läuft dann rückwärts. Ein ganz lustiger Geselle. Später wurde erkannt: Er kreist wie wir um die Sonne, nur auf einer größeren Bahn. Wir überholen ihn.

Karl Popper fasst es so zusammen: „Nicht auf die Entdeckung absolut sicherer Theorien geht die Bemühung der Wissenschaft hinaus, sondern auf die Entdeckung oder, vielleicht besser, Erfindung von prüfbaren Theorien – das heißt aber von falsifizierbaren Theorien – und auf ihre Prüfung oder Falsifikation.“[40] Damit ist jede wissenschaftliche Theorie gleichzeitig eine **widerlegbare Annahme**, Popper und andere Wissenschaftler sprechen von Hypothesen.

Mit dieser vorsichtigen Bescheidenheit wollen wir uns nun dem Raum und der Zeit etwas nähern. Unsere folgenden modellhaften Vorstellungen wollen nicht als Wissenschaft gelten. Sie dienen „nur“ der Bildung, dem allgemeinen, aber sehr wichtigen Weltverständnis. Es sind auch Modelle, aber keine wissenschaftlichen. Sie entstammen populär-wissenschaftlicher Literatur.

Bereits das erste Zitat zeigt uns, dass heutige Physiker manchmal noch immer die vollständige Wahrheit suchen. „Die vollständige Erklärung von Raum und Zeit ist zur größten Herausforderung der Physik, zu ihrer begehrtesten Trophäe geworden.“[41] Dieser Satz stammt von dem angesehenen und bekannten Astrophysiker Brian Greene. Seine verständlichen Bücher sind internationale Bestseller geworden. Und er fährt etwas später fort: „Da Raum und Zeit so eng mit diesem besonders unzugänglichen Bereich – dem Ursprung des Universums – verflochten sind, können wir Raum und Zeit nur vollständig verstehen, wenn wir Gleichungen finden, welche die extremen Bedingungen in den frühsten Augenblicken des Universums bewältigen … Das ist ein Ziel von höchster Bedeutung, das sich, wie viele Physiker meinen, nur erreichen lässt, wenn es gelingt, eine sogenannte vereinheitlichte Theorie zu entwickeln.“[42] Da ist wieder die Suche nach „vollständiger, göttlicher Erkenntnis“.

Das Kleinste und das Größte im All gehören also – wie schon öfter erwähnt – zusammen. Und genau dieser Zusammenhang soll durch die von den Physikern noch nicht gefundene ‚Weltformel’ offen gelegt, verständlich gemacht werden. Auch sie wird ein hypothetisches Modell sein. Vollständige Erkenntnis wird auch der menschlichen Wissenschaft verschlossen bleiben.

---

[40] Popper, Karl, Naturgesetze und theoretische Systeme, in: Albert, Hans (Hg.), Theorie und Realität, ausgewählte Aufsätze zur Wissenschaftslehre der Sozialwissenschaften, Tübingen 1972, S. 49 f
[41] Greene, Brian, Der Stoff aus dem der Kosmos ist – Raum, Zeit und die Beschaffenheit der Wirklichkeit, München 2004, S. 20
[42] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 30 f

Wir sind noch viel bescheidener. Wir wollen uns dem Raum und der Zeit nur bildungsmäßig nähern. Unsere Modelle zielen auf Anschauung, nicht auf mathematisch-wissenschaftliche Erklärung. Dafür brauche wir uns nicht zu schämen. Auch Philosophen sind keine Wissenschaftler, wie ein sehr kluger, mir gut bekannter Theologe einmal richtig feststellte. Schon gar nicht betreiben sie eine Wissenschaft im Sinne von Karl Popper. Doch sie suchen und fragen nach den großen Zusammenhängen, nach einem schlüssigen, vorläufigen und zeitgemäßen Weltverständnis.

Wenden wir uns mit dieser Bescheidenheit zunächst der Zeit, dann dem Raum und schließlich dem Raum-Zeit-Körper zu.

4.2.2 Was ist die Zeit?

Sprachgeschichtlich bedeutet der Ausdruck ‚Zeit' ursprünglich ein ‚Zerteilen', ein ‚Zerschneiden'. Wir können auch sagen, er bezeichnet ein Zählen von Zeiteinheiten (Sekunden, Minuten, Stunden, Tage und Jahre). Der Lauf der Zeit muss aufgegliedert werden, um die Erscheinung ‚Zeit' fassen und bewusst erleben zu können. Erst dann können wir vergangene Ereignisse geschichtlich einordnen und für die Zukunft planen. Der Wechsel von Tag und Nacht, von Jahreszeiten, die Aussaat und die Ernte, aber auch Geburt, Wachstum und Tod, die Gründung oder Zerstörung einer Stadt führten beim Menschen zu einem Bewusstwerden der Zeit. Dieses Erlebnis und Verständnis von Zeit unterscheidet uns neben vielem anderen ganz grundsätzlich vom Tier.

Zu der Zeit gehören auch die **Wiederholungen**. Wir lernen abends Vokabeln und wiederholen sie morgens. Jede Wiederholung setzt ein Denken in der Zeit voraus. Sie ist das Gegenteil von Gleichzeitigkeit wie etwa bei der einmaligen Addition oder der einmaligen Vervielfachung, der Multiplikation.[43] Das Potenzieren ist die mehrmalige, die wiederholte Vervielfachung. Hier sind also die Wiederholung und damit die Zeit naturgemäß mit im Spiel. Dabei läuft die Zeit immer von der Vergangenheit über die Gegenwart in die Zukunft. Es ist ein nicht umkehrbarer

---

[43] Multiplikation lässt sich als wiederholte Addition auffassen. Aber: 1 + 1 = 2 doch: 1 x 1 = 1

Ablauf. Ob das grundsätzlich, also auch für unser Weltall als ganzes gilt, ist wie gesagt ungeklärt. Die Physiker sprechen vom ‚Zeitpfeil', der nur in eine Richtung zeigt oder gar fliegt.

Erstaunlich ist jedoch, dass die Menschen im Laufe der Geschichte immer wieder ein sehr **unterschiedliches Verständnis von der Zeit** hatten. Die ersten überlieferten Gedanken zur der Zeit stammen von den griechischen Philosophen. Schon in der Schule des Parmenides (um 540 – 480 v. Chr.) wurde die Zeit als ewig vorhanden und als ruhiger fester Zustand angesehen: „Die wahre Welt ruht unbeweglich und zeitlos, sie ist ohne Anfang und Ende." Wandel und Vergänglichkeit sind danach nur Sinnestäuschungen. Die Gegenmeinung wurde zur gleichen Zeit von Heraklit (um 550 bis 480 v. Chr.) vertreten. Für ihn ist die Zeit vor allem ein Fließen. Wir können nicht zweimal in denselben Fluss steigen. „Alles fließt", hat Platon in dieser Denktradition formuliert. Damals konnten beide nur philosophieren, nichts wissenschaftlich beweisen.

Einen so grundsätzlichen Gegensatz gibt es auch in der Geschichte der modernen Physik. Der große Physiker **Isaac Newton** (1643-1727) sah wie erwähnt die **Zeit und den Raum als starre, universelle Größen**. Sie sind sozusagen das große, feststehende Gehäuse, in dem sich die physikalischen Gesetze wie in einem Uhrwerk abspielen. Dauer und Absolutheit kennzeichnen danach Raum und Zeit. Von der Materie und deren Bewegungen sind sie unbeeinflusst. Sein berühmter Zeitgenosse **Gottfried Wilhelm Leibnitz** (1648 – 1716) vertrat eine andere Auffassung. Der Gegensatz wurde oft auf die einfach Formel gebracht: „Nach Newton hat das Universum eine Uhr, nach Leibnitz ist es eine Uhr." Für Kant sind Raum und Zeit ursprüngliche, vorgegebene und nicht weiter hinterfragbare (a priore) Anschauungsformen.

Die Physik des **20. Jahrhunderts** führte zu einem völlig neuen Verständnis der Zeit. Danach ist ‚unsere' Zeit erst mit dem Urknall und dem sich ausdehnenden Raum-Zeit-Körper entstanden. Vorher war sie noch nicht da. Das Weltall ist – *auch* – eine Uhr. Leibnitz vertrat die modernere Hypothese.

Bekannt ist die Theorie von Einstein, nach der die **Zeit unterschiedlich schnell abläuft,** je nachdem, ob wir uns langsam oder schnell im Weltall bewegen. Bei einem Flug mit Lichtgeschwindigkeit steht die Zeit danach still. Wenn die Lichtgeschwindigkeit das Maß der Vergrößerung im All wäre, dann könnten wir uns das so vorstellen: Niemand kann im Raum-Zeit-Körper schneller als die Ausdehnung des Gesamtkörpers sein. Sonst könnten wir ja diesem Käfig entfliehen, in dem wir stecken, dessen körperlicher, materieller Teil wir sind.

Das wollen wir uns gleich noch genauer anschauen. Allerdings weiß heute niemand, mit welcher Geschwindigkeit oder Grundzahl sich das Universum ausdehnt.[44] Unklar ist auch, ob die Zeit zu allen Zeiten seit der Entstehung des Weltalls gleich schnell ablief. Es wird nämlich von einer inflationären Phase der Ausdehnung kurz nach dem Urknall gesprochen. Der Körper blähte sich nach diesem Modell zunächst unglaublich schnell auf. Gingen damals die Uhren schneller? All das zeigt uns, wie spannend die Physik und die Naturwissenschaften insgesamt sind. Mehr als wir wissen, wissen wir noch nicht. Es lohnt sich also für junge Menschen ihren Neugiertrieb in den Naturwissenschaften auszuleben.

4.2.3 Was ist der Raum?

Die Menschen machten sich im Lauf der Geschichte nicht nur über die Zeit, sondern auch über den **Raum unterschiedliche Vorstellungen**. Dabei wurden auf zwei Fragen immer wieder gegensätzliche Antworten gegeben: Ist der Raum endlich, also begrenzt oder ist er unendlich? Und ist er zweitens leer oder mit Inhalt? Ist er ein Vakuum oder besitzt er Körperlichkeit?

Im Altertum und im Mittelalter wurde der Raum als zeitlich **endlich und** räumlich **begrenzt** gedacht. Nur das Jenseits ist ewig und unendlich groß. Erst spät, mit dem Beginn der Neuzeit und den Lehren des Kopernikus kommt die Vorstellung eines unendlichen großen Weltraums auf. Auch für Newton ist der Raum ein unendlicher, lückenloser Zusammenhang, der unabhängig von den Gegenständen und

---

[44] Dabei kann auch von einer exponentiellen Vergrößerung ausgegangen werden. Beispiel: Jeder Urkörper verdoppelt sich je Zeiteinheit. Je mehr Urkörper es gibt, umso größer wird bei jedem Glockenschlag, also je Zeiteinheit, die Vergrößerung des Gesamtkörpers.

Vorgängen besteht, die sich in ihm befinden. Bis ins 19. Jahrhundert beherrschte die Wissenschaft die Vorstellung von einem ruhigen, gleichförmigen und unendlichen Raum.

Die nächste Frage war: Ist der Raum auch leer? Schon die alten Griechen stritten darüber, ob der Raum **leer oder mit einem Inhalt** gefüllt ist. Parmenides (um 540 – 480 v. Chr.) setzt das ‚Sein' mit einem ‚Raumerfüllen' gleich. Nur das Nichtsein ist leer. Demokrit (um 460 – 370 v. Chr.) geht davon aus, dass uns eine große Leere umgibt. Darin bewegen sich die Atome und alle körperlichen Gegenstände.

Für René Descartes (1596 – 1650) fallen Räumlichkeit und Körperlichkeit zusammen. Darin unterscheidet er sich grundlegend von Newton. Die **Körperlichkeit des Raums** war auch im 19. Jahrhundert nicht die alleinige, aber die vorherrschende Vorstellung bei den Physikern. Man stellte sich den Raum als ein Geflecht von Korpuskeln oder als einen Äther vor, vergleichbar mit der Luft. Er sollte das Medium sein, in dem sich Licht und alle elektromagnetischen Wellen ausbreiten. Als Einstein behauptete, das Licht braucht zur Ausdehnung überhaupt kein Medium, gewann wiederum die Vorstellung vom vollständig leeren Raum, vom Vakuum die Oberhand.

Auf Grund **neuester Erkenntnisse** gehen wiederum die Astrophysiker von der Körperlichkeit des Raumes aus. Greene schrieb noch 2004 zu seinem Buch ‚Der Stoff, aus dem der Kosmos ist': „... doch die Ausrichtung auf die Körperlichkeit von Raum und Zeit ist ein etwas ungewöhnlicher Ansatz."[45] Dieser Gedanke durchzieht dann das ganze Buch wie ein roter Faden.

Wer bis in die Quantenphysik vorstößt, gelangt an jeder Stelle des Weltalls zu den quirligen, bewegten Planck-Gebilden, einem ‚Quantenschaum'. Wir vergleichen sie mit Urkörpern gemäß unserem Modell vom Raum-Zeit-Körper.[46] Der Raum ist weder Energie noch Materie. Er ist etwas anderes, womöglich ein Gefecht von Urkörpern

[45] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 11
[46] „Das elektromagnetische Feld, die Felder der starken und der schwachen Kernkraft und das Gravitationsfeld sind alle in mikroskopischen Größenordnungen den hektischen Quantenfluktuationen unterworfen. Tatsächlich gibt es diese Feldfluktuationen sogar in dem Raum, den wir normalerweise als leer vorstellen, dem Raum, der weder Materien noch Felder zu haben scheint. ... Denken Sie nur an den Higgs-Ozean, von dem die moderne Theorie behauptet, er durchdringe den leeren Raum." – Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 372

mit Planck-Größen. Dabei könnte – im Sinne des Urknalls, der befruchteten Eizelle, der Zahl 1 – in jedem einzelnen Urkörper wie in einer Urzelle der ganze Bauplan, die ganze Potenz, der Wachtumsplan der Raumzeit stecken.

Die Physiker sprechen vom Higgs-Ozean, der zugleich das Bezugssystem für Einsteins Relativitätstheorie wäre. So etwas wie das Higgs-Teilchen haben 2012 die Forscher im CERN bei Genf gefunden. Es floss dann viel Sekt. Und plötzlich war der alte, gar nicht so bekannte britische Physiker Peter Higgs in aller Munde, in allen Medien. Im folgenden Jahr 2013 bekam er den Nobel-Preis. Greene stellte schon 2004 fest: „Die Raumzeit ist ein Etwas."[47] Dieser Raumzeit wollen wir uns nun nähern.

4.2.4 Was ist der Raum-Zeit-Körper?

Wie hängen nun **Raum und Zeit** zusammen? Bilden wir uns auch dazu einige anschauliche Modelle, wohl wissend, dass diese immer unvollständig und widerlegbar sein werden. Aber wir können wie gesagt nur in Modellen denken. Mit ihnen veranschaulichen wir uns Teile der Wirklichkeit und im Folgenden Teilaspekte von Einsteins Vorstellungen zur Raumzeit. Sie ergeben sich aus seiner speziellen und allgemeinen Relativitätstheorie. Wir wollen und können diese Theorien weder umfassend darstellen noch ableiten. Denn die Relativitätstheorien sind so komplex, dass Physiker, Einstein eingeschlossen, viele Jahre brauchen, um sie vollständig zu verstehen.[48]

Doch wir wollen uns einige wichtige, immer wieder erwähnte Teilstücke der Theorien bildlich veranschaulichen und uns anhand von einprägsamen Beispielen unvergesslich machen. Dabei befasst sich die ältere und ‚spezielle Relativitätstheorie' mit der Raumzeit und der Ausbreitung des Lichts beim Fehlen von Energie, Materie und Schwerkraft (Gravitation). Die spätere und viel schwierigere ‚allgemeine Relativitätstheorie' fügt dann die Schwerkraft, die Energie, die Materie und Masse in das Modell ein.

[47] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 96 (dieser Satz ist dort durch kursiven Druck hervorgehoben.)
[48] Hoffmann, Banesh, Einsteins Ideen, Das Relativitätsprinzip und seine historischen Wurzeln, Heidelberg 1997, S. 159; Greene, Brian, a.a.O., S. 94

Einstein selbst hat eine kurze Abhandlung von 91 Seiten „Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Gemeinverständlich)“ geschrieben.[49] Darin bringt er ein oft wiederholtes Beispiel für unterschiedliche Bewegungen und ihre Messung. Eine Person steht an einem Bahnsteig und betrachtet einen Zug, der fährt. Darin ist ein Mann, der sich im fahrenden Zug bewegt. Nun werden die Bewegung des Zuges und des Mannes im Zug gemessen, und zwar von Bahnsteig aus und dann innerhalb des Zuges. Wir haben folgende Beziehungen: 1. Person sitzt still, 2. eine Person bewegt sich weg, und zwar 3. in einem Körper, der sich selbst bewegt. Dieser Körper ist in unserem folgenden Beispiel das sich ausdehnende Weltall. Einstein hat damals noch nicht gewusst, dass sich das Universum ausdehnt, und zwar mit zunehmender Geschwindigkeit.

Wir haben also für diese drei Beziehungen (1. stillsitzende Person, 2. Person in Bewegung, und zwar 3. in bewegtem Körper). Wir wählen als Bild nicht einen Bahnhof mit Zug sondern das Weltall, den bewegten, sich ausdehnenden Raum-Zeit-Körper).[50]

Wir denken dabei immer in **Anlehnung an unsere Würfelwelt**. Denn danach können wir uns den Raum gut als Körper, als begrenzt und endlich vorstellen. Er wird von lauter Urkörpern gebildet, die die Planck-Maße besitzen. Wir könnten daher auch von Planck- statt Ur-Körpern sprechen. Dieser ‚Raum’ wird zum ‚Raum-Zeit-Körper’, wenn er sich ausdehnt, also mit der Zeit größer wird, zu wachsen beginnt. Die Zeit und die Wachstumsschritte (Grundzahl) bestimmen, wie schnell der Raum wächst. Je schneller die Glockenschläge aufeinander folgen, ums so schneller dehnt sich der Körper aus. Außerdem bestimmt die Grundzahl (Basis) die Größe der einzelnen Wachstumsschritte. Dabei gehen wir von einem symmetrischen und kugelförmigen Wachstum aus. Es bevorzugt keine Richtung. Und die ständige Vervielfachung jedes einzelnen Urkörpers vergrößert denknotwendig die ganze Raum-Zeit-Blase mit zunehmender Geschwindigkeit; das heißt dann exponentiell.

Können wir uns nun in diesem Modell – mit aller Vorsicht und allen Vorbehalten – einige Erscheinungen von Einsteins spezieller Relativitätstheorie veranschaulichen?

---

[49] Einstein, Albert, Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie (Gemeinverständlich), Braunschweig 1920

Wir wollen es versuchen. Nach dieser Theorie gilt für **alle Bewegungen durch die Raum-Zeit:** „Die vereinigte Geschwindigkeit der Bewegung eines beliebigen Objektes durch den Raum und seine Bewegung durch die Zeit ist immer exakt gleich der Lichtgeschwindigkeit. ... etwas von seiner Lichtgeschwindigkeitsbewegung wird aus Bewegung durch die Zeit in Bewegung durch den Raum verwandelt, so dass die kombinierte Gesamtgeschwindigkeit unverändert bleibt.“ (Greene)[51] Auf Grund dieser Unveränderlichkeit (Invarianz) der Raum-Zeit-Geschwindigkeit nannte Einstein selbst seine Theorie lieber Invarianztheorie als Relativitätstheorie.

Machen wir uns dies an einem **bildhaften Beispiel** klar. Wir stellen uns vor, drei gesprächige Tanten und der kleine aufgeweckte Bub Fritzel sitzen an einem Tisch in einem quadratischen Raum. Er ist vergleichbar mit dem Innern eines Urwürfels. Die Tanten unterhalten sich über Freunde und Feinde, über Verwandte und Bekannte, getreu dem Grundsatz ‚den Menschen interessiert am meisten der Mensch’. Fritzel denkt mehr, als er schwätzt; er ist ein Forschertyp und auf alles Wissen über Gott und die Welt neugierig.

Plötzlich bewegt sich – von uns als Beobachter aus gesehen – die rechte Wand des würfelförmigen Zimmers nach rechts weg. So wie oben in der Würfelwelt dargestellt wächst der Raum nach rechts zu einer Stange und zwar mit Lichtgeschwindigkeit. Die drei Tanten stört das nicht, sie quatschen weiter. Doch Fritzel springt auf sein Motorrad Marke ‚Lichtgeschwindigkeit’. Er folgt mit dem Motorrad der fliehenden Wand, und zwar **mit Lichtgeschwindigkeit**. Das Krad hat drei Messgeräte an der Lenkstange. Auf dem ersten Gerät wird seine Fahrgeschwindigkeit angezeigt (Tachometer – km je Sekunde), das zweite zählt die zurückgelegten Kilometer (Kilometerzähler) und das dritte ist eine Uhr.

Sobald der Fritzel Lichtgeschwindigkeit erreicht hat, zeigt dies das erste Gerät an, der Tachometer. Der Zeiger des Tachos zeigt jetzt unbeweglich auf ‚Lichtgeschwindigkeit’ (300.000 km/sec). Das zweite Messgerät, der Kilometerzähler, rast jetzt unheimlich schnell, er spult im Nu (entsprechend jeder Sekunde bei den sitzenden, zurückgebliebenen Tanten) jeweils 300.000 Kilometer ab. Doch der Blick

---

[50] Wir werden auch nicht wie Einstein Rechnen und Koordinaten nehmen, sondern uns alles nur bildlich, bildungsmäßig veranschaulichen.
[51] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 68

auf die Uhr versetzt Fritzel in Erstaunen. Die Uhr steht still, auf ihr läuft die Zeit nicht weiter. Fritzel schaut nach vorne; und tatsächlich wird der Abstand zwischen ihm und der fliehenden Wand nicht größer. Aus seiner Sicht findet in diese Richtung kein Wachstum der Raum-Zeit-Stange, also kein größer Werden mit der Zeit, statt.

Licht und alles, was sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegt, reist zeitlos;[52] die Uhren stehen für diese Reisenden still. Ein Wachstum der Raum-Zeit-Stange ist für sie nicht erkennbar; ohne Wachstum keine Zeit. Die Zeit an sich, ein Glockenschlag je sec., gibt es weiter. Das All als ganzes oder hier die Würfelwand wächst so weiter. Doch für den Fritzel findet kein Wachstum, kein Größerwerden des Abstands zur Würfelwand statt. Der sich ausdehnende Raum-Zeit-Körper baut erst die Zeit und den Raum auf. Außerhalb dieses Gebildes gibt es unseren Raum und unsere Zeit nicht. Dort herrschen Ewigkeit und Unendlichkeit, Ruhe und Beständigkeit im Sinne von Newton und der Religionen. Wer im Raum-Zeit-Körper oder Weltall mit Lichtgeschwindigkeit reist, nimmt am Aufbau des Raumes teil, nicht aber am Aufbau der Zeit.

Wenn aber der Fritzel nach rückwärts schaut, dann sieht er, dass er sich von den quatschenden Tanten mit Lichtgeschwindigkeit entfernt. Auf dem Kilometerzähler von Fritzels Motorrad laufen nun die zurückgelegten Kilometer mit der höchstmöglichen Geschwindigkeit, mit Lichtgeschwindigkeit ab. Schneller kann Fritzel nicht fahren, denn dann würde er sich der Wand vor ihm nähern, gegen sie rennen oder sie gar durchstoßen. Wer aber in einem Raum-Zeit-Körper als Materie eingeschlossen ist und dazugehört, der kann ihn nicht verlassen. Das ist auch der uralte Gedanke der Religionen. Wir sind mit unserem Körper in dieser sichtbaren Welt verankert und können sie höchstens als verstorbene Seelen verlassen und davon schweben.[53] Bildlich können wir auch sagen: Gott hält den Möchtegern-Flüchtling zurück, indem er seine Uhr anhält und am Motorrad eine Geschwindigkeitssperre bei Lichtgeschwindigkeit eingebaut hat. Der Flüchtling trippelt jetzt (raum-zeitlich) auf der Stelle.

[52]Die Astrophysiker sagen, Photonen [= Lichtquanten] sind und reisen masse- und zeitlos.

[53] Vom Basler Astrophysiker Bruno Binggeli stammt das Buch „Primum Mobile – Dantes Jenseitsreise und die moderne Kosmologie“, Zürich 2006. Darin stellt er anschaulich und verständlich das mittelalterliche Weltbild anhand Dantes ‚Göttlicher Komödie’ dem Weltbild der heutigen Physik gegenüber. Er zeigt erstaunliche Parallelen und grundsätzliche Unterschiede auf. Sehr lesenswert.

Bei diesem Modell wird hier die wissenschaftlich noch nicht bestätigte Annahme unterstellt, dass sich die Wand mit Lichtgeschwindigkeit entfernt und damit das Wachstum des Raum-Zeit-Körpers mit Lichtgeschwindigkeit erfolgt. Alles, was sich darin bewegt und dazu gehört, kann demnach höchstens diese Geschwindigkeit erreichen. Dabei müssen wir nach unserem Modell der Würfelwelt unterscheiden: Die Betrachtung eines einzelnen Urwürfels bzw. Urkörpers und die Betrachtung des Weltalls als Ganzes. Jeder Urkörper vervielfacht sich mit Lichtgeschwindigkeit. Je mehr Urkörper es gibt, umso größer wird bei jedem Glockenschlag, also je Zeiteinheit, die Vergrößerung des Gesamtkörpers. Das **Wachstum des gesamten Alls** wird immer schneller. Die Vermehrungs- oder Geburtenrate der einzelnen Urwürfel bzw. Urkörper bleibt gleich. Das würde auch veranschaulichen, warum sich die Galaxien im All mit zunehmender Geschwindigkeit voneinander entfernen (exponentielles Wachstum).

Doch selbst wenn sich das All schneller als mit Lichtgeschwindigkeit ausdehnen würde, bliebe das Modell aussagekräftig. Unbestritten ist die Lichtgeschwindigkeit eine **Geschwindigkeitsgrenze im Weltall.** Wir können auch sagen es ist eine Mauer, nämlich die ‚Lichtmauer', vergleichbar mit der Schallmauer. Der Unterschied besteht aber darin, dass Düsenflugzeuge mit einem großen Knall die Schallmauer durchbrechen können. Die Lichtmauer kann nach heutigem Wissen niemand und nichts durchbrechen. Das war der erste Streich, der zweite folgt sogleich.

Fritzel verlangsamt nun sein Motorrad und fährt nur noch **mit halber Lichtgeschwindigkeit.** Was zeigen seine drei Geräte an? Der Geschwindigkeitsmesser zeigt halbe Lichtgeschwindigkeit. Die zurückgelegten Kilometer sind nur noch 150.000 km je Sekunde – bezogen auf die Zeit bei den schwätzenden und sitzenden Tanten. Und die Uhr tickt wieder. Allerdings läuft sie nur halb so schnell wie am Tisch bei den ruhig sitzenden Klatschtanten. Während die Zeit bei ruhenden Objekten ‚normal' abläuft und bei Lichtgeschwindigkeit still steht, verlangsamt sie sich bei Reisenden mit halber Lichtgeschwindigkeit ebenfalls um die Hälfte. Fritzel kann dies verstehen. Denn aus seiner Sicht entfernt sich die Wand vor ihm und wächst so mit halber Lichtgeschwindigkeit. Von den Tanten entfernt sich Fritzel, wenn er zurückblickt, ebenfalls mit halber Lichtgeschwindigkeit. Halbe

Geschwindigkeiten und halbe Zeit zusammen ergeben, wie Einstein es verlangt, eine ganze Lichtgeschwindigkeit. Das war der zweite Streich, der dritte folgt sogleich.

(Einstein nimmt in seiner „gemeinverständlichen Relativitätstheorie“ zwei Koordinatensysteme. Ein großes ruhendes Koordinatenkreuz (entspricht dem Bezugssystem, in dem die Tanten sitzen). Dann wird in dieses ruhende Koordinatenkreuz ein zweites eingefügt. Dieses zweite Bezugssystem bewegt sich im ersten System von links nach rechts (entspricht der mit Lichtgeschwindigkeit fliehenden Wand. In diesem zweiten Bezugsystem bewegt sich der Fritzel. Einstein veranschaulicht das mit einem Bahndamm (ruhendes Bezugssystem) und einem vorbeifahrenden Zug (sich zum Bahndamm bewegendes Bezugssystem bzw. Koordinatenkreuz). Er sagt wörtlich: „Dem Bahndamm entspricht ein Koordinatensystem *K*, dem Zug ein Koordinatensystem *K‘.“ (S. 21)* Ich habe das angeblich „gemeinverständliche“ Büchlein ganz durchgelesen, aber die mathematischen Ableitungen nicht verstanden. Das ist für unser ‚unwissenschaftliches‘, nur bildungsmäßiges Modell auch nicht nötig. Wir können uns aber mit dem aus der Würfelwelt abgeleiteten Modell eine Vorstellung von dem verschaffen, was Einstein sagt. – Ihr alle seid aufgefordert, diese Zusammenhänge noch anschaulicher und wirklichkeitsnäher darzustellen. Vielleicht hat das eine Mädel und der andere Bub Lust zum Entdecken und Erforschen bekommen. Dann hätte diese Schrift ihren Zweck erfüllt. Sie soll Lust auf die MINT-Fächer machen.

Fritzel will nun wissen, was passiert, wenn er mit seinem Motorrad anhält, den Motor aus macht und absteigt. Der Tacho zeigt dann null. Er befindet sich **in Ruhe**. Der Blick zu den sitzenden Tanten bestätigt ihm, dass er sich von ihnen nicht mehr entfernt. Die Entfernung bleibt gleich. Auch der Kilometerzähler bewegt sich im Ruhezustand nicht. Es kommen keine weiteren km dazu. Und seine Uhr geht nun so schnell wie früher und damit so schnell wie die Uhr auf dem Tisch der Tanten. Das leuchtet Fritzel ein. Er schaut nun nach vorn zur fliehenden Wand, sie entfernt sich mit Lichtgeschwindigkeit; sie oder genauer die Raum-Zeit-Stange wächst aus der Sicht vom Fritzel und den Tanten mit Lichtgeschwindigkeit. Der Raum hinter ihm oder der Abstand zu den Tanten wird dagegen nicht größer. Wieder ist die kombinierte Raum-Zeit gleich der Lichtgeschwindigkeit.

Wir verstehen jetzt auch, warum Einstein seine Theorie zuerst nicht Relativitätstheorie, sondern ‚Invarianztheorie' genannt hat. Den Ausdruck Relativitätstheorie mochte er nicht sonderlich. Das Wort ‚relativ' übersetzen wir hier am besten mit ‚veränderlich' und die ‚Invarianz' mit ‚Unveränderlichkeit'. Denn es gilt mit den Worten von Greene gesprochen: „Geschwindigkeiten sind relativ, also veränderlich; Entfernungen im Raum sind relativ; Zeitintervalle sind relativ. Aber die Theorie führt ein umfassendes, neues und absolutes Konzept ein. Die ***absolute Raum-Zeit*.**"[54] Letztere ist unveränderlich, also eine Naturkonstante, ein Naturgesetz; wir können auch sagen eine natürliche Schranke, die niemand überschreiten kann.

Einstein macht in seiner speziellen Relativitätstheorie eine weitere Aussage, die uns Mitmenschen immer wieder in Staunen versetzt. Danach **erreicht uns das Licht immer mit Lichtgeschwindigkeit**, gleichgültig ob wir ihm davon eilen, uns auf die Lichtquelle zubewegen oder uns in Ruhe befinden. Das ergibt sich auch aus dem „Modell der Unveränderlichkeit der Raumzeit", der Invarianztheorie.

Beim Schall ist das anders. Wenn zwei Düsenflugzeuge mit Überschallgeschwindigkeit hinter einander her fliegen, dann kann das erste Flugzeug den Motor des zweiten nicht hören. Es eilt den Schallwellen davon, ist schneller als sie.

Beim Licht ist das nicht so. Nehmen wir das obige Beispiel mit dem Fritzel und den drei geschwätzigen Tanten. Irgendwo im All leuchtet nun eine Lichtquelle auf. Nehmen wir an, das Licht braucht 10 Minuten, um die drei Tanten zu erreichen, die ruhig an ihrem Tisch sitzen. Wenn nun Fritzel dem Licht davoneilt, dann erreichen ihn die Lichtwellen trotzdem zur gleichen Zeit. Denn seine Uhr geht entsprechend langsamer. Die Gesamtheit der Raumzeit entspricht jedoch der Lichtgeschwindigkeit. Das gilt sowohl für den davoneilenden Fritzel als auch für die ruhenden Tanten. Auch wer auf die aufblitzende Lichtquelle zueilt, kann sich nicht früherer der Lichtstrahlen erfreuen. Auch seine Uhr geht genau so viel langsamer, dass er zum gleichen Zeitpunkt wie die ruhenden Tanten in den Genuss des Lichtes kommt. (Ich gebe zu, das widerspricht unseren Alltagserfahrungen und ist deshalb schwer vorstellbar.)

---

[54] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 70

Damit kommen wir zu einer weiteren Gesetzmäßigkeit und gleichzeitig zu einer ersten Aussage der ‚allgemeinen Relativitätstheorie'. Alles, was **Masse** hat, kann sich nur langsamer, grundsätzlich viel langsamer als mit Lichtgeschwindigkeit bewegen. Die Motorradfahrt von unserem Fritzel ist also in der Wirklichkeit nicht möglich, sie war nur ein Gedankenexperiment, um eine Theorie zu veranschaulichen. In Wirklichkeit braucht Fritzel je schneller er wird, umso mehr Energie. Je mehr er sich der Lichtgeschwindigkeit nähert, umso größer wird sein Energiebedarf. Je schneller sich ein Gegenstand mit Masse fortbewegt, desto mehr Kraft müssen wir aufwenden, um die Geschwindigkeit weiter zu erhöhen. Knapp unterhalb der Lichtgeschwindigkeit müssten wir also eine unendlich große Kraft aufbringen, um die Geschwindigkeit des jeweiligen Masse-Körpers zu steigern. Das ist unmöglich. Und jeder Auto- und Motorradfahrer weiß, dass mit der Geschwindigkeit der Benzinverbrauch steigt. Außerdem wissen wir, dass ein Gegenstand umso schwerer ist, je mehr Masse er hat. Einen PKW-Anhänger kann ich schieben, einen LKW-Anhänger nicht.

Bei der **Beschleunigung** kommt jedoch etwas Weiteres hinzu, das auch jeder von uns kennt. Je schneller ein Gegenstand bewegt wird, umso schwerer wird er. Es ist, wie wenn Gott bei dem davoneilenden Fritzel nicht nur die Uhr immer langsamer laufen lässt, sondern ihn auch mit einem Gummiband elastisch festhält. Zunächst ist beim Davoneilen wenig Kraft aufzuwenden; die Elastizität ist noch groß. Der Fritzel kann leicht fortrennen. Doch auch bei einem Gummiband, das etwa an einem Baum festgebunden ist, muss der Fliehende zunehmend mehr Kraft aufwenden, je länger und straffer das Band wird. Schließlich lässt es sich nicht mehr weiter dehnen, es ist ganz auseinander gezogen, keine Kraft kann es weiter ausdehnen. (Es kann nur noch reißen, wenn wir stark genug sind. Gegenüber den Naturgesetzen und Naturkräften sind wir aber machtlos.)

Wir kennen diesen mit der Geschwindigkeit **steigenden Kraftbedarf** auch von einer anderen Erfahrung. So können wir einen größeren Stein in einen Plastikbeutel stecken und an einer Schnur befestigen. Dann drehen wir uns um unsere Achse, sodass der Beutel mit dem Stein die Schnur spannt und um uns herum fliegt. Je schneller wir uns drehen, umso mehr Kraft brauchen wir, um die Schnur festzuhalten; und umso mehr Energie müssen wir einsetzen, um die Dreh-Geschwindigkeit weiter zu erhöhen. Die Geschwindigkeit und das Gewicht des kreisenden Steins werden größer. Wir merken, dass der Zug an unseren Händen immer stärker wird. Wenn wir den Strick loslassen, dann fliegt der Stein auch umso weiter, je schneller er gedreht wurde. – Ein vergleichbares Erlebnis hat, wer auf einem Volksfest mit einem Kettenkarussell fährt.

Warum ist das alles so? Die Physiker haben sich zur Erklärung geprüfte und noch nicht geprüfte Theorien und Modelle ausgedacht. Einige sind sehr neu und sollen unter anderem am CERN[55] (Europäischer Rat für Kernforschung) im schnellen Teilchenbeschleuniger weiter erforscht werden. Nach einer dieser Theorien, die auf einem mathematischen Modell von Peter W. Higgs beruht, leistet der Raum-Zeit-Körper selbst, also nach unserer Vorstellung das Gewebe aus Urkörpern, **Widerstand gegenüber bewegten Körpern**. Es ist so wie bei einer immer schnelleren Motorradfahrt, wir spüren einen immer stärkeren Luftwiderstand. Um diese Annahme zu bestätigen, müssen die Physiker die ‚Körperlichkeit' des Raum-Zeit-Körpers anerkennen und dann auch nachweisen. Denn die völlige Leere, das absolute Vakuum, dürfte zu einem solchen Widerstand nicht fähig sein.

Tatsächlich gehen jedoch die Wissenschaftler am CERN von einem solchen Widerstand bei schnellen Beschleunigungen aus. Sie sprechen von einem honigartigen oder sirupartigen Widerstand, den Teilchen überwinden müssen, wenn sie bis in die Nähe der Lichtgeschwindigkeit beschleunigt werden. Und genau dies soll mit kleinsten Materieteilchen im CERN versucht werden (bis 99,99% der Lichtgeschwindigkeit). Auch dies würde wiederum für ein Modell des Raum-Zeit-Körpers sprechen, der aus lauter Urkörpern mit Planck-Maßen besteht. (Als ich das 2005 schrieb, war es noch nicht soweit. Inzwischen wurden im CERN die Higgs-Teilchen nachgewiesen. Da knallten die Sektkorken!)

Ändern wir nun noch einmal unser Gedankenexperiment mit den drei Klatschbasen und dem kleinen Fritzel etwas ab. Wir stellen uns vor, dass sich plötzlich nicht nur die rechte Wand, sondern auch alle übrigen Wände, die Decke und der Fußboden mit Lichtgeschwindigkeit entfernen. Unser würfelförmiger **Raum wächs**t also

[55] CERN, Abkürzung für französisch Conseil (auch Centre) européen pour la recherche nucléaire, das Europäische Kernforschungszentrum in Meyrin bei Genf; 1954 gegründet durch 12 Mitgliedstaaten (2005: 20 Mitgliedsländer).

symmetrisch **in alle Richtungen**. Die erste Vermutung ist nun, dass dadurch alle vier Personen auseinander und ins Uferlose fallen. Wir könnten auch annehmen, sie schwimmen mit dem nach allen Richtungen wachsenden Raum-Zeit-Körper davon. Tatsächlich werden sie aber nach den Gesetzen der Physik zusammenbleiben. Und das können wir uns gut vorstellen, wenn wir abends einen Blick an den gestirnten Himmel werfen. Obwohl sich das Weltall ausdehnt, sehen wir jeden Abend unsere Nachbargestirne und unsere ganze Milchstraße am gleichen Ort; und diese Gestirne ziehen die gleichen bekannten Bahnen. Sie bleiben beieinander, obwohl sich das All als ganzes ständig und immer schneller ausdehnt.

Damit sind wir bei einem weiteren Baustein der allgemeinen Relativitätstheorie und des heutigen ‚Standardmodells der Kosmologie'. Es ist die **Schwerkraft**, auch Anziehungskraft oder Gravitation genannt. Es ist eine von den vier Kräften, die die Physik heute kennt und die das All im Großen und im Kleinen zusammenhalten. In der kleinen Welt der Atome wirken die starke und die schwache sowie die elektromagnetische Kraft. Sie halten die Atomkerne und die Atome zusammen. Die vierte Kraft, die Schwerkraft hält die sichtbare Materie im Großen zusammen. Sie hat die Bildung von Sternensystemen wie unsere Milchstraße ermöglicht.

Kräfte wirken dadurch, dass sie um sich herum ein Kraftfeld bilden. Wir kennen dies von dem Magneten. Wenn wir auf ein Blatt Papier Eisenspäne streuen und darunter etwa einen Hufeisenmagneten halten, dann ordnen sich die Eisenspäne in der Form der Magnetfelder an. Insgesamt ist die Gestalt der Kraftfelder wellenförmig. Einstein geht daher auch von Gravitationswellen aus, die allerdings noch nicht nachgewiesen wurden. Wie das in etwa aussieht, sehen wir, wenn wir einen Stein in einen Teich werfen. Dann rollen in alle Richtungen Wellen, die allmählich auslaufen. Im Unterschied dazu bewirken die Kraftfelder eine Anziehung. Man spricht auch von Wechselwirkungen oder gegenseitiger Anziehung, die diese Kräfte ausüben.

Jeden materiellen Körper umgibt so ein Kraftfeld und die Kraftfelder ziehen sich gegenseitig an. Bei einem Magneten, der eine Münze anzieht, beobachten wir dies in starker Form. Und nun fügt Einstein etwas Erstaunliches hinzu. Die Kraftfelder der Gravitation verformen oder **krümmen die Raum-Zeit**, den Raum-Zeit-Körper nach unserem Modell; so wie die Wasserwellen die Oberfläche eines Teichs verformen.

Danach gilt in den Weiten des Weltalls, in denen aufs Ganze gesehen nur wenig sichtbare Materie vorhanden ist, die klassische Geometrie von Euklid. Sie zeichnet sich z.B. durch rechte Winkel, gerade Linien oder vollkommene Kugeln aus. Einfach gesagt zeichnete Euklid auf einem flachen Blatt Papier. Die Physiker sagen, dort ist das Weltall glatt, nicht gekrümmt.

Wo dagegen die Raum-Zeit oder der Raum-Zeit-Körper durch die Schwerkraft verformt ist, gilt die Geometrie von Riemann mit Krümmungen und Verzerrungen. Riemann zeichnet vereinfacht gesprochen nicht auf einem flachen Papierblatt, sondern auf einer großen Kugel; man denke etwa an einen großen Medizinball. Auffällig ist dabei z.B., dass dann in einem Dreieck die Winkelsumme nicht mehr 180 Grad, sondern größer ist. Das griechische Wort für Kugel ist Sphäre; man nennt solche Dreiecke auch sphärische Dreiecke. Die Riemann'sche Geometrie ist daher auch bei der Abbildung unserer gekrümmten Erde auf flachen Landkarten nützlich.

Beobachtungen im Weltall bestätigten in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhunderts zum einen alle Annahmen von Einsteins Relativitätstheorie und außerdem die immer schnellere, möglicherweise logarithmische Ausdehnung des Universums. So bewegen sich die von uns entfernten Galaxien immer schneller von unserer Milchstraße weg. Nur unsere nächste Galaxie, das Sternbild der Andromeda, kommt auf unsere Milchstraße zu, wird sich in ferner Zukunft mit unserer Milchstraße vereinen. Hier wirkt die Anziehungskraft, die mit dem Quadrat der Entfernung abnimmt. Nach Einstein sind die Krümmung der Raumzeit und die Anziehungskraft dasselbe. Weil der Raum um die Sonne gekrümmt ist, kreist die Erde in dieser Furche um die Sonne.

Einstein sagt noch etwas ganz Erstaunliches. Jedes Materieteilchen hat **zwei Arten von Masse**, die gleichwertig (äquivalent) sind. Es besitz zum einen ***träge Masse***. Sie bewirkt, dass ein Körper der Beschleunigung wachsenden Widerstand entgegensetzt. Außerdem gibt es die ***schwere Masse.*** Sie ist die Ursache dafür, dass ein solches Materieteilchen in einem Schwere- oder Gravitationsfeld (z.B. der Erde) Gewicht hat. Die Leute in den Raumfähren sind schwerelos. Ein tragender Grundsatz der allgemeinen Relativitätstheorie ist nun das **Äquivalenzprinzip**. Es fordert die Gleichheit von träger und schwerer Masse. Wenn also eine Bleikugel im

„leeren“ Raum beschleunigt wird, dann ist dazu ein gleichwertiger Energieaufwand erforderlich, wie wenn auf die Kugel bei einem freien Fall die Erdanziehungskraft wirkt. (Im Vakuum fallen die Bleikugel und eine Hühnerfeder gleich schnell.)

Dabei ist Masse gleichzeitig eine bestimmte Energieform von Materieteilchen. Für die Umrechnung von Masse in Energie hat Einstein die weltbekannte Formel $E = m * c^2$ aufgestellt.[56] Außerdem gilt: „Wenn Teilchen mit hoher Bewegungsenergie auf andere Teilchen treffen, kann sich spontan ein Teil der Bewegungsenergie in Materie umwandeln.“[57] c^2 ist dabei der Umtauschkurs. Im Bereich der Lichtgeschwindigkeit soll gleichzeitig bei kleinsten Teilchen der **Übergang von Energie in Materie** stattfinden. Und genau dies wollen nun die Physiker mit dem neuen Teilchenbeschleuniger am CERN untersuchen. Sie wollen Teilchen bis (fast) auf Lichtgeschwindigkeit beschleunigen und dann zusammenstoßen lassen. Derzeit (= 2005) sind die Überlegungen dazu in weiten Bereichen noch ***reine, unbewiesene Theorie.***

Es gibt nach heutigem Verständnis kleinste und nicht mehr teilbare **Elementarteilchen mit und ohne Masse**. Lichtteilchen (Photonen, Lichtquanten) sind masse- und zeitlos. Sie reisen mit Lichtgeschwindigkeit. Andere Elementarteilchen (z.B. Elektronen) besitzen Masse und sind damit Materieteilchen. Alle Elementarteilchen, auch die Photonen, zeigen eine Schwerkraft-Wechselwirkung. Masse sorgt für Gewicht und Trägheit. Auch Lichtstrahlen werden durch die Schwerkraft ab- oder umgelenkt, nicht verlangsamt. Damit ist die Beschleunigung solcher Masse-Teilchen mit Energieaufwand verbunden und unterliegt den oben dargestellten Raum-Zeit-Gesetzen der speziellen Relativitätstheorie bzw. der Invarianztheorie.

Damit haben wir Einsteins Theorie keineswegs erklärt. Doch wir haben uns einige Stücke mit Bildern und Beispielen so veranschaulicht, dass wir uns darunter etwas vorstellen können. Wir haben uns bildlich, nicht mathematisch diesem Modell genähert.

---

[56] E = Energie; m = Masse; c = Lichtgeschwindigkeit, c^2 = Umrechnungsfaktor bzw. Kurswert der Masse im Verhältnis zur Energie.
[57] Landua, Rolf, a.a.O., S. 23

Fassen wir zusammen. Energie und Materie sind gleichwertig. Sie lassen sich nach Einsteins Formel $E = m * c^2$ ineinander umrechnen und entsprechen sich. Im Urknall war alles Energie und noch nichts Materie. Materie kann aber in unterschiedlichsten Daseinsformen auftreten, in festem, flüssigem oder gasförmigen Aggregatzustand.[58] Auch träge Masse und schwere Masse sind gleichwertig, nach Einstein äquivalent (Äquivalenzprinzip). Je schneller ein Stein beschleunigt wird, umso schwerer wird er. Zur Ruheenergie kommt noch die Bewegungsenergie. Damit entsprechen sich auch Schwerkraft und Beschleunigung. Wie alle Kräfte wirkt die Schwerkraft durch ein Kraftfeld mit Wellen (Gravitationswellen). Es verformt und krümmt in seinem Kraftfeld den Raum-Zeit-Körper. Womöglich wird unter dieser Einwirkung auch das Wachstum des Raum-Zeit-Körpers beeinflusst, verlangsamt oder gar angehalten. Daher bleiben möglicherweise die Gestirne der Milchstraße beieinander. Zwischen ihnen dehnt sich der Raum-Zeit-Körper ‚räumlich' nicht aus. Die Gestirne ‚ruhen', die Zeit läuft ‚normal' ab. (Das Wachstum des Raum-Zeit-Körpers kommt bei Einstein noch nicht vor.)

In diesem Zusammenhang wird auch darüber gemutmaßt, wie das **Weltall als Ganzes aussehen könnte,** welche Form es hat. Dabei werden wir es nie von außen betrachten können. Doch die Physiker und andere Naturwissenschaftler sind in ihren Vorstellungen oft schon weitergekommen, wenn sie die Grundsätze der **‚Symmetrie'** angewandt haben. Wörtlich übersetzt bedeutet Symmetrie ‚Ebenmaß' oder ‚gleiche Maße'. Oft wird auch von Spiegelbildlichkeit gesprochen. Das Gesicht eines Menschen und viele andere Erscheinungen der Natur sind ‚annähernd' symmetrisch. Sie lassen sich an einer Achse spiegeln. Unsere Würfel weisen ein hohes Maß an Symmetrie mit gleichen Abmessungen und Winkeln auf. Ein Höchstmaß an Symmetrie hat eine Kugel. Alle Punkte ihrer Oberfläche sind vom Mittelpunkt gleich entfernt, weisen gleiche ‚Abmessungen' auf. Von Supersymmetrie sprechen viele dann, wenn sich eine Kugel, noch um ihre Achse dreht. Dies ist nicht nur bei unserer Erde der Fall, sondern auch bei unserer Milchstraße und den anderen Galaxien. Sie befinden sich in einer Drehbewegung.

Doch immer wieder tritt eine gewisse Unvollkommenheit oder **Symmetriebrechung** auf. Die Erde ist keine richtige Kugel, sondern an der Polen abgeplattet. Sie umkreist die Sonne nicht in einem wirklichen Kreis, sondern in einer Ellipse. Manche Physiker

---

[58] In welchem Aggregatzustand sich Materiearten (z.B. Wasser) zeigen, hängt von der Temperatur ab.

gehen davon aus, dass durch eine kleinste Symmetriebrechung überhaupt erst der Urknall ausgelöst wurde und das Weltall dadurch vollkommen und unvollkommen zugleich, so wie es ist, entstand. Daher ist es nicht verwunderlich, dass sich manche Astrophysiker den Weltraum als eine größer werdende Kugel oder eine wachsende Raum-Zeit-Blase vorstellen. Doch das ist nicht die einzige Form von vollkommener Symmetrie. Nach Greene ist „so etwas wie ein unendlicher, expandierender Würfel aus durchsichtigem Gummi mit Galaxien, die gleichmäßig in seinem Inneren verteilt sind, eine weitere mögliche Form für den Raum."[59] Diese Bild wäre dann ganz nah bei unserer Würfelwelt. Doch die kugelförmige Ausdehnung gefällt mir besser, scheint mir gefühlsmäßig wahrscheinlicher.

4.2.5 Wo ist die Quantenwelt?

Alle von Einstein gefundenen und soeben angesprochenen Gesetze gelten nach heutigem Kenntnisstand in den Weiten des Weltalls, im großen Raum-Zeit-Körper. Wir könnten auch von der Einstein-Welt, von der Welt der beiden Relativitätstheorien sprechen. Der schon erwähnte Max Planck ist dagegen in eine andere Welt eingedrungen, in jene der Quantenphysik, der **Zusammenhänge im Kleinsten**. Wir könnten sie auch die Planck-Welt nennen. Und hier gibt es nun Erscheinungen, die Einstein überhaupt nicht mochte und teilweise lebenslang anzweifelte. Sie widersprechen auch den Gesetzmäßigkeiten, wie sie im Großen gelten. Dazu gehören beispielsweise das Auftreten von Zufall und Wahrscheinlichkeit,[60] die Unmöglichkeit bei kleinsten Teilchen gleichzeitig den Ort und die Geschwindigkeit (spin) zu messen (Heisenbergs Unschärferelation). Hinzu kommt die ganz grundsätzliche Erkenntnis, dass unterhalb der Planck-Länge, wir können sagen in den Urkörpern, die Gesetze von Raum und Zeit außer Kraft gesetzt sind.

Wenn wir an irgendeiner Stelle des Alls bis zu diesen kleinstmöglichen Maßeinheiten, den Planck-Größen vorstoßen, dann treffen wir auf **'einen brodelnden, siedenden Hexenkessel turbulenter Fluktuationen'.** Manche

---

Es gibt bei ganz großer Hitze noch eine weitere Erscheinungsform: das Plasma.

[59] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 277
[60] „Gott würfelt nicht", meinte dazu Einstein zunächst.

sprechen vom ‚Quantenschaum', andere vom Higgs-Ozean, den wir dort vorfinden sollen. Vieles ist schon erdacht, aber noch nicht erwiesen: „Was dann für eine Struktur sichtbar wird – was die ‚Moleküle' und ‚Atome' der Raumzeit sind –, ist eine Frage, die augenblicklich mit großem Eifer erforscht wird. Sie muss noch gelöst werden", so Greene.[61] Im Kern geht es auch darum, den ‚heftigen Konflikt zwischen den zentralen Ideen der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenmechanik' zu lösen.

Besonders unglaubwürdig, ja völlig wirklichkeitsfremd war für Einstein dabei das **Prinzip des ‚verschränkten Raums'** in der Quantenphysik. Nach der klassischen Physik ist der Raum etwas, das einen Gegenstand von einem andern trennt und unterscheidet. Dinge, die an verschiedenen Orten im Raum sind, können einander nur beeinflussen, wenn in irgendeiner Weise der Raum überwunden, überbrückt wird, der sie trennt. Dazu ist nach Einstein zumindest Lichtgeschwindigkeit erforderlich. Die Quantenphysik kennt nun Wechselwirkungen ohne Zeitverzug im Weltall. Physiker sprechen von Überwindung der Lokalität und instanter[62] Beziehung. Dabei lässt sich ‚instant' am besten mit ‚gegenwärtig', ‚unverzüglich' oder ‚sofort wirksam' übersetzen. Das bedeutet beispielsweise, dass unsere Einwirkung auf ein Teilchen (z.B. die Messung) nicht nur den Zustand dieses Teilchens verändert, sondern im gleichen Augenblick auch ein weit entferntes, mit ihm verschränktes Teilchen in den gleichen Zustand versetzt. Beide verhalten sich synchron, weisen jeweils den gleichen quantenphysikalischen Zustand auf (z.B. gleicher spin[63]).

Einstein schüttelte dazu nur den Kopf und sprach von ‚spukhafter Fernwirkung'. Er wollte mit diesem Zauber in seinem bekannten Einstein-Podolsky-Rosen-Versuch endgültig Schluss machen, dies alles als Unsinn widerlegen. Und tatsächlich hat er es damit nachgewiesen.[64] Greene schreibt dazu: „Das heißt, wir können uns den Raum nicht so vorstellen, wie man es einst tat: Zwischenraum, *gleich von welcher Ausdehnung*, garantiert nicht, dass zwei Objekte getrennt sind, da die Quantenmechanik zulässt, dass eine Verschränkung, eine Art Verknüpfung,

---

[61] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S 376 ff

[62] instant (engl.) = augenblicklich, unverzüglich (z.B. Instant-Kaffee = sofort lösliches Kaffeepulver)

[63] Spin (engl.) heißt Drall, hier: Drehimpuls, Drehbewegung eines Teilchens

[64] Das Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon in gut beschrieben bei Arroyo, Camejo, Silvia, Skurrile Quantenwelt, Heidelberg 2006, S. 160 ff (das Buch wurde von einer sehr intelligenten Schülerin vor ihrem Abitur geschrieben und fand auch in der Fachwelt große Beachtung.)

zwischen ihnen besteht. ... die Quantenverknüpfung [kann] zwischen zwei Teilchen auch dann noch fortbestehen, wenn sie sich auf entgegengesetzten Seiten des Universums befinden. Aus der Sicht ihrer Verschränkung ist es ungeachtet der vielen Billionen Kilometer, die zwischen ihnen liegen, so als würden sie aneinander haften. ... doch von all [den Aspekten], die experimentell bestätigt worden sind, finde ich keinen so verblüffend, wie die Erkenntnis, dass unser Universum nicht lokal ist.“[65]

Die räumliche Verschränkung ist eine der vielen physikalischen Erscheinungen in der Quantenwelt, die diese so geheimnisvoll und erstaunlich macht, von der großen Einstein-Welt trennt. Die Anwendung der mathematischen Gleichungen von Einstein auf die Quantenphysik führt zum ihrem Zusammenbruch, zu ‚desaströsen Ergebnissen’. Zwischen beiden Welten besteht heute in der Physik noch ein erheblicher Sicherheitsabstand, der durch die Suche nach der ‚Einheitstheorie’, der Weltformel überwunden werden soll.

Sollen wir nun ratlos und verzweifelt vor diesen Erkenntnissen stehen? Oder sollen wir doch versuchen, uns ein vorläufiges, wenn auch unvollkommenes, ungeprüftes, ja gewagtes Bild davon zu machen? Versuchen wir das letztere. Greifen wir wieder zu unserer Würfelwelt. Wenn wir sie so nachdenklich betrachten, dann können wir uns bei ihr **drei Ereigniszonen** vorstellen.

Da gibt es zunächst die **Bewegung durch oder im Raum-Zeit-Körper**. Das ist etwa so, wie wenn wir uns vorstellen, dass in einem großen aufblasbaren Luftballon eine Mücke hin und her fliegt. Sie könnte an die Außenhaut des Luftballons nie anstoßen, wenn der Luftballon ein Raum-Zeit-Körper wäre, in dem die Gesetze der speziellen Relativitätstheorie gelten. Das wurde oben gezeigt. Die Mücke könnte einfach nicht so schnell fliegen, wie der Ballon größer wird. Denn sie würde – sagen wir von Gott oder seinen Gesetzen – am ‚Zügel der Zeit’ und am ‚Gummiband der Masse’ festgehalten. – Ein anderer Vergleich wäre, dass ein Fisch durchs Meer schwimmt.

Nun gibt es aber in unserer Würfelwelt und in einem damit vergleichbaren Raum-Zeit-Körper noch einen ganz anderen Ereignisbereich. Denn unser Raum-Zeit-Gebilde besteht aus einem fest verknüpften Urkörpergewebe (Higgs-Ozean) bzw.

---
[65] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 102 f

aus lauter Urwürfeln bei der Würfelwelt. Hier ist vorstellbar, dass es **im Inneren der Urkörper** eine Nachrichtenübermittlung ohne Zeitverzug, also eine instante Informationsübertragung gibt. Denn es ist bekannt, dass in der Zahl Eins oder in den Urwürfeln die Gesetze der Mathematik nicht gelten. Entsprechendes gilt auch für Körper mit den winzigen Planck-Werten. Unterhalb der Plancklänge sind anerkanntermaßen die Gesetze von Raum und Zeit nicht mehr anwendbar.

Wir können also einmal ganz kühn annehmen, dass zwei Teilchen mit **‚verschränkter Wechselwirkung'** unmittelbar über eine ‚Standleitung' im Inneren der Urkörper miteinander verknüpft sind. Jedenfalls ist das eine bildhafte Vorstellung von einem ansonsten ganz unerklärlich anmutenden Geschehen. Übrigens ist auch in unserer alltäglichen Welt eine Nachrichtenübermittlung ohne Zeitverzug vorstellbar. Nehmen wir an, zwei Jäger sitzen auf zwei nicht allzu weit voneinander entfernten Hochsitzen. Sie wollen sich nun lautlos und ohne Zeitverzug gegenseitig mitteilen, wenn einer von ihnen Wild sieht. Dazu haben sie zwischen den beiden Hochsitzen eine lange, starre, dünne Latte aufgelegt. Wenn ein Jäger an der Latte rüttelt, dann kann es augenblicklich und ohne Zeitverzug der andere Jäger spüren. Das Signal heißt dann: ‚Wild in Sicht'.

Zwischenergebnis: Im ersten Fall bewegt sich unsere Mücke im Raum-Zeit-Körper von den Urkörpern losgelöst und an ihnen vorbei durch den Raum. Oder ein Fisch schwimmt durchs Meer. Beide bewegen sich als Materie in der Einstein-Welt und unterliegen den Gesetzen der Relativitätstheorie. Im zweiten Fall wird die Information innerhalb der Urkörper wie mit einer festen Stange oder starren Standleitung ohne Zeitverzug weitergegeben. Das gilt in der Plank-Welt nach den Gesetzen der Quantenphysik.

Vorstellbar ist noch eine **dritte Ereigniszone**. Die dritte Möglichkeit ist eine Ausbreitung mittels des ‚Urkörper-Gewebes'. Das wäre eine Welle, z. B. eine Schallwelle im Wasser. Die Welle verformt das Medium Wasser, indem sie sich fortbewegt. Sie bringt das Wasser in Schwingungen, so wie ein Stein beim Aufklatschen auf der Wasseroberfläche Wellen entstehen lässt. Statt durch das Wasser zu schwimmen, bewegt die Welle das Wasser, versetzt es in Schwingungen.

Das ist auch beim Licht vorstellbar, das sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter hat. Es breitet sich als Welle im Raum nach allen Richtungen mit Lichtgeschwindigkeit zeit- und masselos aus.[66] Wie die Oberfläche[67] von Wasser das Medium für die Ausbreitung von Wasserwellen ist, so könnte die Oberfläche der Urkörper das Mittel sein, auf dem sich das Licht zeit- und masselos fortbewegt. Auch der schwimmende Fisch und der wellenförmig gleitende Schall im Wasser bewegen sich in zwei unterschiedlichen Ereignisbereichen oder Bezugssystemen.

Das erklärt auch ihre unterschiedlichen ‚Ausbreitungsgesetze'. Der Delphin, der durch das Wasser schwimmt, bewegt sich anders als die Schallwellen, die er zu seiner Orientierung ausstößt (Echolotprinzip). Diese Schallwellen nutzen das Wasser als Mittel ihrer Ausbreitung mit gleichbleibender Geschwindigkeit. Das Wasser wird dabei wellenförmig bewegt, verformt und gekrümmt. Bemerkenswert ist an dieser Stelle, dass sich auch die Schwerkraft durch Gravitationswellen mit Lichtgeschwindigkeit im Raum-Zeit-Körper ausbreitet. Nur ihre Wirkung nimmt mit dem Quadrat der Entfernung ab. Die Physiker gehen auch hier von einem Doppelcharakter als Welle und Teilchen aus. Das Teilchen der Schwerkraft hat auch schon einen Namen, nämlich Graviton oder Gravitationsquant; entdeckt wurde es allerdings noch nicht.

Fassen wir diese Überlegungen, weil sie etwas ungewöhnlich sind, am Beispiel des Wassers noch einmal zusammen. Ereigniszone 1: Der Delfin schwimmt durch das Wasser (je schneller, umso mehr Kraft ist nötig). Ereigniszone 2: Die Rufe des Delfins breiten sich als (Schall-)Wellen mit gleichbleibender (!) Geschwindigkeit (1407 m/s) aus. Sie versetzen das Wasser in Schwingungen. Ereigniszone 3: Das Wasser selbst ändert sich, die Struktur seiner Atome bzw. Moleküle ändert sich. (Es wird z.B. Dampf oder Eis). In den drei Ereignisbereichen kommen jeweils unterschiedliche physikalische Gesetze zur Geltung.

In unserem obigen Beispiel bewegt sich Fritzel als materieller Körper ***durch den Raum***. Er wird dabei gleichzeitig am Zügel der Zeit und am Gummiband der Masse festgehalten. Anders ist es mit dem Licht. Es ist masselos und zeitlos. Es breitet sich

[66] Die Gravitation bremst und lenkt auch das Licht ab.
[67] Wir sagen hier die ‚Oberfläche', weil die Ausbreitung nicht ins Innere des Wassers, in die Wassermoleküle eindringt.

als ***Welle auf den Urkörpern*** mit Lichtgeschwindigkeit aus. Damit erreicht es den umhereilenden Fritzel und die sitzenden Tanten, die sich alle im Raum-Zeit-Käfig befinden und dort raum-zeitlich festgebunden sind, gleichzeitig.

Hier gibt es noch einen kleinen gedanklichen Stolperstein. Nehmen wir an, das All dehne sich mit Lichtgeschwindigkeit aus. Dann könnte das Licht von fernen Sternen nicht zu uns kommen, wenn es nur mit Lichtgeschwindigkeit durch ein Vakuum eilte. Denn die Ausdehnung des Universums und die Ausbreitung des Lichts würden sich gegenseitig aufheben. Wir müssen uns also besser vorstellen, dass sich das Licht auf der Oberfläche des Urkörper-Geflechts oder in dem Medium Higgs-Ozean mit Lichtgeschwindigkeit c ausbreitet. Von außerhalb des Alls betrachtet würde es also schneller als c erscheinen. Wir haben wieder die zwei unterschiedlichen Bezugsysteme oder Koordinatensysteme.

Licht und andere masselose Welle-Teilchen können ein Sonderfall sowohl der Einstein-Welt als auch der Planck-Welt sein. Anerkanntermaßen gibt es zwei Teilgebiete der Physik, in denen die **Gesetze der allgemeinen Relativitätstheorie und der Quantenphysik gleichzeitig** gelten. Es sind dies die Schwarzen Löcher, in denen ein ganzer Stern unter seinem eigenen Gewicht zu einem winzigen Punkt zusammenfällt. Vielleicht schlüpft er zurück in seinen Urkörper. Außerdem ist es der Urknall, in dem das gesamte Weltall in einem Klümpchen zusammengepresst war, das möglicherweise den ersten und einzigen Urkörper, gewissermaßen die Eizelle unseres Alls darstellte. (Wer hat das Ur-Ei befruchtet, dass es zu wachsen begann?)

Bei einem schwarzen Loch müssen wir die allgemeine Relativitätstheorie verwenden, weil die große Masse ein beträchtliches Gravitationsfeld erzeugt. Doch gleichzeitig müssen wir beim schwarzen Loch die Quantenmechanik heranziehen, weil die gesamte Masse auf einem winzigen Punkt zusammengepresst wird. „Doch dergestalt kombiniert, brechen die Gleichungen zusammen, weshalb bisher noch niemand bestimmen konnte, was direkt im Zentrum eines schwarzen Lochs geschieht.“[68]

[68] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 32, 379

Verlassen wir aber schnell das schwarze Loch und wenden uns wieder dem seit uralten Zeiten angebeteten Licht zu. Geheimnisvoll ist für die Physiker bis heute der erwähnte **Doppelcharakter als Welle und Teilchen**. Das führt uns zur schwierigen Unschärferelation von Werner Heisenberg (1901 – 1976). Danach können z.B. bei Lichtwellen nicht gleichzeitig der Ort und die Geschwindigkeit[69] bestimmt werden. Solche Wellen müssen wir uns wie die schon erwähnten elektromagnetischen Kraftfelder vorstellen. Photonen (Lichtquanten, Lichtteilchen) sind die elementaren Bestandteile elektromagnetischer Felder. „Wir können sie uns gewissermaßen als die mikroskopischen Übermittler der elektromagnetischen Kraft vorstellen. Wenn Sie etwas sehen, können Sie sich den Vorgang entweder so vorstellen, dass ein wellenförmig schwingendes Feld in Ihr Auge einfällt und Ihre Netzhaut stimuliert, oder so, dass teilchenförmige Photonen in Ihr Auge eintreten und dort die gleiche Wirkung erzielen. Aus diesem Grund wird das Photon manchmal auch als *Botenteilchen* der elektromagnetischen Kraft bezeichnet.“[70]

Vielleicht ist es einfacher, sich in diesem Fall das Licht nicht als **Welle <u>und</u> Teilchen** vorzustellen, sondern als **Welle <u>oder</u> Teilchen**. Dann wäre der Vorgang so zu verstehen: unsere Netzhaut wird von einer elektromagnetischen Welle getroffen. Im Augenblick des Auftreffens bricht jedoch die Welle zusammen und springt in den physikalischen Zustand eines Teilchens (Lichtquant nach Planck). Ein Photon ist entstanden und wird von unserer Netzhaut erkannt. Es ist so wie mit dem Kohlweißling; er kann entweder eine kriechende Raupe oder ein fliegender Schmetterling sein, aber nicht beides gleichzeitig.

Für diese Sichtweise sprechen sogar Aussagen einiger bekannter Physiker. So ist es klar, dass wir den Aufenthaltsort eines Photons nicht bestimmen können, solange es noch eine Welle ist. Greene meint dazu: „Der Grund ist vielmehr eine fundamentale Eigenschaft von Wellen: Sie sind in der Regel nicht auf einen einzelnen Punkt konzentriert, sondern erfüllen eine ganze Raumregion.“[71] Solange Licht eine Welle und kein Teilchen ist, schwingt es mit den Urkörpern des Raum-Zeit-Körpers oder –

---

[69] Genau muss es heißen der „Impuls“, das ist die Bewegungsgröße eines Körpers, und zwar das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit.
[70] Greene, Brian, Der Stoff, a.a.O., S. 293
[71] Greene, Brian, der Stoff, a.a.O., S. 123

nach den Vorstellungen von manchen heutigen Astrophysiker – es schwingt im Higgs-Ozean.[72]

Und nun greifen wir einen Gedanken von Heisenberg auf. Er meinte, dass wir im Moment der Messung eines beliebigen Objektes, also auch einer Welle, mit dieser wechselwirken. Sogar das Licht, mit dem wir beobachten oder messen wollen, führt zu einem winzigen Stoß, wenn es auf der Welle aufprallt. Dadurch wird die Welle gestört, genauer zerstört, sie wird ein Teilchen. Der Stoß erschüttert die Welle, sie bricht zusammen und nimmt Teilchen-Charakter an. Möglicherweise verlässt sie in diesem Augenblick auch die Quantenwelt. Jedenfalls dann, wenn das Teilchen wie die meisten Teilchen Masse annimmt, tritt es in den Wirkungsbereich der Gravitation und damit der Relativitätstheorie.

Eine weitere Vermutung (Hypothese) passt hier noch gut dazu: Was einmal ein Schmetterling ist, kann nie mehr eine Raupe werden. Diesen Gedanken haben abgewandelt die Physiker Ghirardi, Rimini und Weber geäußert. Sie sprechen von einem **Kollapsmechanismus**. Wellen, die gestört werden (etwa durch Beobachtung), brechen zusammen, nehmen Teilcheneigenschaft an. Zusammengebrochene Wellen können aber nicht wiederhergestellt werden. Und erst ein Teilchen hat – im Unterschied zu einer Welle – einen bestimmten Ort. Das wäre eine einfache Modellvorstellung über die Doppeleigenschaft (Welle oder Teilchen) und Heisenbergs Erkenntnis, dass wir Ort und Geschwindigkeit bei Wellen nicht gleichzeitig feststellen können.

Da bei Ghirardi und Kollegen die Rückentwicklung nicht möglich ist, erklären sie damit auch den **Zeitpfeil.** Er besagt, dass es im Zeitablauf nur eine Richtung gibt, nämlich von der Vergangenheit über die Gegenwart in die Zukunft. Was einmal war, kommt nicht mehr wieder. Ein Abtauchen im Weltraum mit Überlichtgeschwindigkeit und ein Wiederauftauchen im Mittelalter gibt es nur in Zukunftsromanen. In den heutigen Gleichungen der Physik sind nun aber Vergangenheit und Zukunft völlig

---

[72] Es wird allerdings auch die Meinung vertreten, dass der Higgs-Ozean absolut nichts mit der Ausbreitung des Lichts zu tun hat (z.B. Greene, S. 307).

gleichberechtigt.[73] Das Kollapsmodell kennt dagegen den Salto rückwärts nicht. Es hilft über diese Hürde hinweg.

Damit kehren wir auch zur Ausgangsfrage dieses Kapitels zurück. Es ist das **große Rätsel**, ob das Weltall, also unser Raum-Zeit-Körper, in dem wir leben und sterben, sich immer weiter, also **unendlich und ewig** ausdehnt. Die Lösung dieses Rätsels wird weiterhin als eine große Aufgabe angesehen, die die Physiker mit ins 21. Jahrhundert genommen haben.[74] Die bisherige Antwort darauf lautet: Das hängt davon ab, wie viel Materie es im Weltraum gibt. Überschreitet diese Menge eine von den Kosmologen errechnete kritische Größe, dann wird sich das All nur bis zur einem bestimmten Größe ausdehnen, danach wieder zusammenziehen und in ganz ferner Zukunft in seinen winzig kleinen Ursprung zurückschlüpfen.

Im 20. Jahrhundert meinten fast alle Wissenschaftler, dass die im Weltraum feststellbare Materie für ein späteres Schrumpfen des Alls bei weitem nicht ausreicht. Es hieß, ‚nach heutiger Vorstellung' dehnt sich das Weltall ewig und unendlich immer weiter aus. Inzwischen wurde immer mehr, und zwar dunkle und unsichtbare Materie errechnet. Heute ist man sicher, dass die **sichtbare, atomare Materie höchstens zehn Prozent** aller Materie ausmacht. Mindestens 90 Prozent ist unsichtbar. Die Wissenschaftler suchen und rechnen weiter. Das Rätsel ist also noch nicht gelöst. Da es nach Popper keinen Wahrheitsbeweis gibt, können alle Vermutungen (Hypothesen) falsch sein.

---

[73] vgl. dazu Greene, Brian, der Stoff, a.a.O., S. 252 (Kollapsmechanismus) und S. 250: „Schrödingers Gleichung behandelt genau wie diejenigen von Newton, Maxwell und Einstein die Vorwärts- und Rückwärtsrichtung in der Zeit vollkommen gleich."

[74] Urban, Knut, Die Physik: Leitwissenschaft des Jahrhunderts, S. 21 in: Urban, Knut und Paul, Günter (Hg.), Physik im Wandel, Welten im Kopf, Hamburg 2000

5 Die 7 Rechenarten erfassen und begreifen

5.1 Wachsen und Schrumpfen - Potenzieren und Radizieren

Nach so viel Weltraum wollen wir uns bei der Mathe entspannen. Kehren wir zurück zu unserer kantigen, dafür aber umso fassbareren Würfelwelt. Lassen wir unsere Gedanken aus den Weiten des Weltalls und der genauso entfernten Quantenwelt zurückschweifen zu unseren **schulischen Rechenaufgaben**. Wir werden jetzt das ‚Potenzieren' als Wachstum und das ‚Wurzelziehen oder Radizieren' als Schrumpfen in der Würfelwelt betrachten. Danach veranschaulichen wir das ‚Logarithmieren' als ein Zählen der Zeit. Das sind die 3 „höheren Rechenarten". Addition bis Division sind die 4 Grundrechenarten. Diese 7 Rechenarten stellen wir dann (vom Addieren bis zum Logarithmieren) als 7 Arten einer Vergrößerung oder Verkleinerung dar.

Doch wir haben bereits einige Erfahrungen und Erkenntnisse gesammelt, die uns die Welt und die Mathe mit anderen Augen sehen lassen als üblich und herkömmlich. Das wollen wir uns bewusst machen und nutzen. In unserer Würfelwelt haben wir das **Wachsen** mit Urkörpern ausführlich vorgestellt. Sie wurden mit der Zeit größer. Wir setzen also die Ausführungen von 3.2 und 3.3 hier fort. Es beginnt im Urwürfel und endet womöglich im Unendlichen. Denn wir können uns bei einem noch so großen Raum-Zeit-Körper immer noch einen weiteren Wachstumsschritt vorstellen. Er wächst noch ein weiteres Mal. Auch mit dem Zählen muss man nicht aufhören, man kann immer noch eine weitere Zahl draufsetzen.

Dieses Wachen wird allgemein ***‚potenzieren'*** genannt. Wir haben das Potenzieren arithmetisch mit Zahlen und geometrisch mit Würfeln dargestellt. Jetzt wollen wir zur Schulmathematik übergehen.

Dafür brauchen wir vor allem die Gleichungen. Sie sind die herkömmlich Art der Darstellung in der Mathe. Wir kennen sie auch schon und können laienhaft sagen: Unsere Gleichungen zeigten einen Rechenvorgang und sein Ergebnis: $2 \times 2 = 4$ Beide Seiten sind gleichwertig, so dass wir sie austauschen können: $4 = 2 \times 2$ - Oft steht links das Ergebnis und auf der rechten Seite der Rechenvorgang: $y = a^x$

Die Gleichung $y = a^x$ zeigt uns, womit wir jetzt arbeiten und rechnen wollen: mit Buchstaben. Buchstaben werden verwendet, wenn das jeweilige Rechnen nicht nur für eine einzige, bestimmte Zahl gilt, sondern für einen ganz bestimmten Zahlenbereich (siehe später „Die Einteilung der Zahlen“) oder gar für alle Zahlen. Der Buchstabe heißt dann ‚unbestimmte Zahl'. Aus 3^0, 3^1, 3^2, 3^3 … wird dann a^x

Verallgemeinert wird also geschrieben: a^x

a^x = b
a = Grundzahl oder Basis (Größe der Wachstumsschritte)
x = Hochzahl, Exponent oder Zeitzahl
b = Potenzwert oder Raum-Zeit-Körper oder Raum-Zeit-Zahl oder Würfelberg

Hier steht a für eine beliebig ausgewählte natürliche Zahl (außer 0) als Grundzahl.
(In den obigen Beispielen der Würfelwelt war a = 3.)
x ist eine Veränderliche; sie durchläuft von uns vorgegebene Zahlenbereiche.
Im obigen Beispielen alle natürlichen Zahlen von 0 bis unendlich (a^0 bis a^∞) [75]

In $a^0 = 1$ = Urwürfel sind alle natürlichen Zahlen außer Null noch eingesperrt.

Der Ausdruck **„Raum-Zeit-Zahl“** soll für die Zahlenwelt und die Würfelwelt gelten. In der Zahlenwelt zeigt die Raum-Zeit-Zahl den Potenzwert (Ergebnis der Potenzrechnung) und in der Würfelwelt die Größe des Raum-Zeit-Körpers, die Anzahl der Urwürfel. (z.B. $3^4 = 81$ ➔ 81 ist die Raum-Zeit-Zahl, der Potenzwert) Anschaulich gesprochen ist es der Würfelberg, der durch eine wiederholte Vervielfachung (Potenzrechnung oder Wachsen) entstanden ist.

Nun liegt es nahe zu fragen, ob es beim Rechnen auch das Gegenteil von Wachstum gibt. Die Antwort ist leicht: Es ist ein **Schrumpfen.** In den gleichen Schritten, in denen unsere Würfelwelt gewachsen ist, kann sie sich auch zusammenziehen. Sie kann Schritt für Schritt kleiner werden. Für diese Rechenart hat sich der Ausdruck

[75] In der mathematischen Zeichensprache sieht die Bestimmung so aus: x = N = {0; 1; 2; 3; …}; N steht für die Menge der natürlichen Zahlen. Bei N* zeigt der Stern *, dass die Zahl Null nicht dabei ist.

'die Wurzel ziehen' oder ***‚radizieren'***[76] eingebürgert. Wir wollen es anschaulich das 'Schrumpfen' nennen und zeigen, wie es abläuft.

Dabei heißt Schrumpfen: ***Mit der Zeit kleiner werden.***

Wer einen etwas besseren Taschenrechner besitzt, der sieht dort sofort, dass zum Wurzelziehen nach einer Umschaltung (shift) die gleiche Taste zu benutzen ist wie zum Potenzieren; es handelt sich beim Radizieren um die Umkehrung des Potenzierens. Ausgangszahl beim Potenzieren ist in unserem Beispiel: 3^1

$$(3^0 \times 3^1 \times 3^1 \times 3^1 \times 3^1 = 3^4 = 81)$$

(weil $3^0 = 1$ kann es wegfallen, es beeinflusst die Rechnung nicht)

Wir beginnen zu rechnen, nachdem der Urwürfel bis zur die Grundzahl 3^1 gewachsen ist. Das gilt auch für die Umkehrung. Wir wollen wissen, wie aus 81 wieder 3^1 wird.

Nehmen wir als Beispiel von oben unsere **Würfel-Stange** mit $\mathbf{3^4}$. Sie besteht aus 81 Urwürfeln (Abb. 3.4). Wir geben nun dieser Stange den Befehl: „Schrumpfe bei 4 Glockenschlägen (Zeiteinheiten) jedes Mal um den Wert 3 oder auf 1/3." Dann ist das Ergebnis: $3^0 = 1$, also der Urwürfel.

Es ist nicht der Wurzelwert 3. Denn bereits nach dem 3. Glockenschlag ist der Wert 3^1 oder der Raum-Zeit-Körper 3^1 erreicht (vergleiche dazu: $3^{4-3=1}$).

Machen wir uns dies auch mit dem Wachsen klar. Der **1. Glockenschlag** macht aus dem Urwürfel 3^0 die Urstange 3^1, von hier sind es noch 3 weitere Glockenschläge bis sich die Zahl 81 oder der Raum-Zeit-Körper mit 81 Urwürfeln einstellen. Beim Schrumpfen läuft alles genauso ab, nur in umgekehrter Richtung. Der letzte oder 4. Glockenschlag macht die Urstange (3^1) zum Urwürfel (3^0); so wie umgekehrt der erste Glockenschlag den Urwürfel (3^0) zur Urstange (3^1) werden ließ.

Die Umkehrung lässt sich auch eindeutig in der **Zahlenwelt** zeigen:

$$3^4 = 81; \sqrt[4]{81} = 3$$

In allgemeiner Schreibweise: $\sqrt[n]{a} = b$

Die Zahl $\sqrt[4]{81}$ heißt dabei ‚Wurzel'. Der Raum-Zeit-Körper (81) wird Radikand genannt. Er ist eine (reelle) Zahl[77] größer als 0. Die Hoch- oder Zeitzahl (^{4}) heißt

[76] ‚radizieren' kommt vom lateinischen ‚radix' = die Wurzel, der Rettich.

beim Wurzelrechnen der ‚Wurzelexponent'. Der Wurzelexponent ist als Zeitzahl immer eine natürliche Zahl größer als 1. Denn wenn noch kein Glockenschlag und damit kein Wachstum stattgefunden hat, dann ist auch kein Schrumpfen möglich.

$\sqrt[n]{a}$ Wurzel

a › 0 **Radikand**, die Zahl, aus der die Wurzel gezogen werden soll, die schrumpft (entspricht dem Raum-Zeit-Körper, Würfelberg oder dem Potenzwert)

n › 1 **Wurzelexponent** (entspricht der Hoch- oder Zeitzahl, Exponent)

$\sqrt[n]{a} = b$

b Wurzelwert (oder kurz n-te Wurzel) (entspricht der Grundzahl oder Basis)

$$\sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^1 \times 3^1 \times 3^1 \times 3^1} = 3^1 = 3$$

Die hoch gestellte Zahl ^{4} beim Wurzelzeichen ist wieder unsere Zeitzahl (Exponent) und zählt die Glockenschläge. Auch das können wir uns an den Abbildungen 3.7 sowie 3.4, oben bei „3.3 Die anschauliche Würfelwelt" noch einmal klar machen.

In der Zahlenwelt gilt auch: $\sqrt[4]{81} = 81^{1/4}$

Denn der Bruch ist die Umkehrung der Vervielfachung. Als Hochzahl zeigt er die Anzahl der Schrumpfungen bis zum Urwürfel an; so wie die ganze Hochzahl die Anzahl der Wachstumsschübe (Glockenschläge) ab dem Urwürfel zeigt.

Macht euch das selbst an einem **weiteren Beispiel** klar. Schaut oben in Abb. 3.6 den Neu-Würfel 3^6 an. Er besteht aus 729 Urwürfeln; sein Wurzelwert ist 3 oder 3^1

$$\sqrt[6]{729} = 3 \quad \text{oder} \quad 729^{1/6} \quad \text{oder} \quad 3^{6-5=1} = 3^1 = 3$$

Das Wachsen ist eine **wiederholte Vervielfachung** (Multiplikation). Das Wurzelziehen ist das Gegenteil, nämlich eine **wiederholte Division**. Die Hoch- und Zeitzahl zählt die Wiederholungen der Vervielfachung beim Wachsen oder die Anzahl der Teilungen beim Schrumpfen. Und wie gesagt sind Wiederholungen das Gegenteil von Gleichzeitigkeit, sie verlangen denknotwendig die Einbeziehung der Zeit.

[77] Zu den Zahlenarten siehe unten „Die Einteilung der Zahlen".

5.2 Die ‚Zeit zählen' oder das Logarithmieren

Auch das **Logarithmieren** lässt sich in unserer Würfelwelt grafisch, genau gesagt raum-zeitlich abbilden und damit sehr anschaulich erklären.[78]

Logarithmieren ist dabei das **Zählen der Hochzahlen, also der Zeit** beim Wachsen. Es wird die Anzahl der Vervielfachungen gezählt.

Der 'Logarithmus' nennt also die Zahl der Wachstumsschübe (Glockenschläge) von der Zahl 1 (Urwürfel) bis zur Raum-Zeit-Zahl (Raum-Zeit-Körper, Würfelberg). Bildlich ausgedrückt: Der Logarithmus zählt die Glockenschläge, die ertönt sind, von der ersten Ausdehnung des Urwürfels bis zu dem Würfelkörper, der die Raum-Zeit-Zahl darstellt. Wir nennen den Logarithmus[79] hier zum besseren Verständnis **Zeit-Zähler.** Und 'logarithmieren' heißt in unserem Sprachgebrauch die 'Zeit zählen' oder die 'Wachstums-Schübe abzählen'.

Das bedeutet, dass beim Logarithmieren die Zeitzahl gesucht wird. Wieviel Wachstumsschübe hat es gegeben? Dazu müssen wir den Würfelberg (Raum-Zeit-Zahl) und die Größe der einzelnen Wachstumsschritte (Grundzahl) kennen.

Die Größe der einzelnen Wachstumsschritte, das **Maß der Vervielfachung** bestimmt wie immer die Grundzahl, also bei der Grundzahl 2 die Verdoppelung je Glockenschlag oder die Verdreifachung bei der Basis 3 usw. Der erste Schritt bzw. Glockenschlag ist stets die Entstehung der 'Grundzahl' aus der Zahl 1 oder aus dem 'Urwürfel' (z.B. aus 3^0 wird 3^1).

$n = \log_a b$ wird gelesen: **n ist der Logarithmus von b zu Basis a**
$n = \log_a b$
n ➔ ist der **Logarithmus** oder Zeitzähler (entspricht der Hoch- und Zeitzahl)
a ➔ ist die **Basis** oder Grundzahl (Größe der Wachstumsschritte)
b ➔ heißt **Numerus** (entspricht Raum-Zeit-Körper, Würfelberg oder Potenzwert)

[78] Die „Erfindung" der Logarithmen (ab 1614) durch die Briten John Napier und Henry Briggs erzählt kurz und gut Ian Stewart (Weltformeln, a.a.O., S. 43 ff.). Für die Erfinder war es „nur" eine praktische Rechenabkürzung: statt Multiplikation der Grundzahlen jetzt Addition der Hochzahlen. (vgl. dazu 3.4)
[79] Wörtlich übersetzt bedeutet: Logarithmus (griechisch) = Zahlenverhältnis

Die Formel [$2 = \log_{10} 100$] bedeutet herkömmlich: Die Zahl 2 ist der Logarithmus von 100 zur Basis 10. Das ist für viele Schüler und Schülerinnen auf Anhieb schwer zu verstehen. Versuchen wir es daher nochmals mit der Würfelwelt.

In der Sprache und Anschauung der Würfelwelt heißt [$2 = \log_{10} 100$]: ***Die Zeit-Zahl 2 (= Logarithmus) zeigt an, dass sich der Urwürfel zweimal verzehnfachen musste, damit sich das Ergebnis 100 eingestellt hat.*** Das Ergebnis (hier: 100) ist entweder der Potenzwert (Zahlenlehre) oder der Raum-Zeit-Körper (hier: 100 Urwürfel). Diese Raum-Zeit-Zahl (hier: 100) wird beim Logarithmieren von den Mathematikern 'Numerus'[80] genannt. Wir sagen hier Raum-Zeit-Zahl; und sie entspricht dem Raum-Zeit-Körper (10^2) mit seinen 100 Urwürfeln. Er ist entstanden, nachdem der Urwürfel 10^0 sich zweimal, also bei zwei Glockenschlägen (nach je einer Sekunde), verzehnfachte und somit insgesamt verhundertfachte. Die Grundzahl (Basis) ist die tief gestellte Zahl $_{10}$ bei „$\log_{\underline{10}}$“; sie zeigt den Maßstab für die Größe der einzelnen Wachstumsschübe an, hier die Verzehnfachung.

Und $2 = \log_{10} 100$ kann ich auch als $2 = \log_{10} 10^2$ schreiben. Wird nämlich die **Raum-Zeit-Zahl (Numerus) als Potenz** der Grundzahl dargestellt, dann kann ich auch hier sofort den Zeitzähler (Logarithmus) ablesen. Oder anders ausgedrückt: Wenn ich den Logarithmus suche, muss ich die Raum-Zeit-Zahl als Potenz der Grundzahl schreiben. Sobald mir das gelingt, habe ich die Aufgabe gelöst:

$$y = \log_{10} 100$$
$$y = \log_{10} 10^2 \quad \text{ich sehe sofort} \Rightarrow$$
$$2 = \log_{10} 100$$

Logarithmus 1 stellt den ***ersten Wachstumsschub*** dar und führt stets vom 1 (Urwürfel) zur Grundzahl (Urstange). z. B. $3^1 = 3$ oder $10^1 = 10$

Folgerichtig muss der Zeitzähler oder Logarithmus 1 als Raum-Zeit-Zahl oder Numerus immer die **Grundzahl** sein.

$$1 = \log_{10} 10 = \log_{10} 10^1 \quad \text{oder allgemein:}$$

$$\boxed{1 = \log_a a}$$

[80] ‚numerus' (lateinisch) heißt ‚Zahl', ursprünglich aber ‚Teil eines Ganzen'.

Weil jede Zahl hoch Null gleich 1 ist ($a^0 = 1$), muss der Zeitzähler oder **Logarithmus 0** anzeigen, wenn noch ***keine Ausdehnung*** vorliegt. Wir stecken noch im Urwürfel. Beim Zeitzähler oder Logarithmus 0 hat bis jetzt null Ausdehnung stattgefunden. Und daher stellt die **Raum-Zeit-Zahl 1** oder **Numerus 1** den Urwürfel dar, in dem jede Zahl steckt, bevor der erste Wachstumsschub erfolgt ist (vergleiche oben 3.2 ‚Das Wachsen des Raumes mit der Zeit').

$$0 = \log_{10} 1 \text{ oder allgemein:}$$

$$\boxed{0 = \log_a 1}$$

Fassen wir zusammen! Die Mathematiker nennen ***Logarithmus***, was wir den **Zeit-Zähler** nennen. Er zeigt die Anzahl der Glockenschläge an und entspricht der Hoch- bzw. Zeitzahl (Exponent) beim Wachsen (Potenzieren). Damit wird mit dem Logarithmus gezählt bzw. angezeigt, wie viele Wachstumsschübe stattgefunden haben. Das Ergebnis dieser Wachstumsschübe oder den entstandenen Raum-Zeit-Körper (oben: 100 Urwürfel) nennen die Mathematiker dann den ***Numerus***. Schließlich bezeichnet die ***Basis*** oder ***Grundzahl*** den Maßstab für die Wachstumsschübe (hier: die Verzehnfachung). Die Mathematiker sagen dann zu **[$2 = \log_{10} 100$]** 'Der Logarithmus 2 zur Basis 10 ist 100'. Wir könnten sagen: Der Zeit-Zähler 2 mit der Grundzahl 10 ergibt 100. Oder: Die Zeit-Zahl 2 zeigt uns bei der Grundzahl 10 als Raum-Zeit-Zahl 100 an (denn $10^2 = 100$).

Damit können wir noch einen Schritt weiter gehen. Es gelingt uns nun bei geschickter Schreibweise, die drei höheren Rechenarten auf einen Blick zu erfassen. Sie sind nämlich mathematische Darstellungen gleichartiger Vorgänge: Wachsen (= mit der Zeit größer werden), Schrumpfen (= mit der Zeit kleiner werden), Zeitzählen (beim Wachsen oder Schrumpfen).

Wir suchen daher eine Zauberzahl, die uns die Zusammenhänge auf einen Blick vor Augen zaubert.

5.3 Die 3 höheren Rechenarten auf einen Blick

Wir können nun für die drei höheren Rechenarten eine **anschauliche Schreibweise** einführen. Bleiben wir bei unserem Beispiel mit der Grundzahl 10, der Zeitzahl 2 und der Raum-Zeit-Zahl 100, also bei $100 = 10^2$. Das schreiben wir jetzt so:

$$^{2}\mathbf{100}_{10} \text{ oder } [^{\text{Zeit-/Hochzahl (z.B. in sec)}}\textbf{Raum-Zeit-Zahl}_{\text{Grundzahl (z.B. in ccm)}}].$$

Die ***Zeitzahl*** wird vor der Raum-Zeit-Zahl als Hochzahl geschrieben. Da oben ist die Kirchturmuhr mit ihren Glockenschlägen. Die ***Raum-Zeit-Zahl*** (der Raum-Zeit-Körper, Potenzwert) steht im Mittelpunkt und genau auf der Zeile. Das ist der Würfelberg, den wir vor uns sehen. Die ***Grundzahl*** wird nach der Raum-Zeit-Zahl tief gestellt. Sie zeigt sofort, wie groß die Wachstums- oder Schrumpfungsschübe sind.

Im obigen Beispiel ($^{2}100_{10}$) ist damit ^{2} die Zeitzahl, 100 die Raum-Zeit-Zahl und $_{10}$ die Grundzahl. Wir nennen den ganzen Ausdruck die **Zauberzahl**; denn die Zahl zaubert uns schlagartig, auf einem Blick alle Zusammenhänge vor Augen.

Ganz augenfällig ist die Umformung für das Schrumpfen (Wurzelzeihen):

$$^{2}100_{10} \Rightarrow \sqrt[2]{100} = 10$$

Beim Wachsen (Potenzieren) wird der Ausdruck so umgeschrieben:

$$^{2}100_{10} \Rightarrow 100 = 10^2$$

Beim Logarithmieren sieht die Umformung so aus:

$$^{2}100_{10} \Rightarrow 2 = \log_{10} 100$$

Für das Potenzieren: Wir sehen bei $^{2}100_{10}$ sofort: Nach 2 Glockenschlägen (Zeitzahl) ist der Würfelberg (Raum-Zeit-Zahl) 100 entstanden, wenn ein Wachstumsschritt (Grundzahl) 10 ist. Oder: Die tief gestellte Grundzahl (Basis) 10 ergibt bei Hochzahl 2 als Raum-Zeit-Zahl 100. Oder: Die Grundzahl 10 hoch 2 ist 100; letzteres ist genau die **Formel beim Wachsen bzw. Potenzieren:** $10^2 = 100$

Für das Wurzelziehen können wir aus $^{2}100_{10}$ sofort ablesen: Wenn die Raum-Zeit-Zahl 100 einmal schrumpft sind wir bei der Grundzahl 10. Das heißt, der erste Glockenschlag lässt 100 (= 10^2) auf 10^1 schrumpfen ($10^{2-1=1}$ = 10^1). Der 2. Glockenschlag führt zu 10^0 oder zum Urwürfel ($10^{2-2=0} = 10^0 = 1$). Ganz einleuchtend und augenfällig ist die arithmetische Schreibweise: Denn wir ersehen schnell aus $^{2}100_{10}$ die **Wurzel-Formel** $\sqrt[2]{100} = 10$. Die Mathematiker sagen: Die 2. Wurzel (Quadratwurzel) aus 100 ist 10.

Für das Logarithmieren erkennen wir auf einen Blick aus $^{2}100_{10}$, dass die Zeitzahl (hier: Logarithmus) 2 zur Grundzahl (Basis) 10 den Raum-Zeit-Wert (hier Numerus) 100 hat. Die **Logarithmus-Formel** $2 = \log_{10} 100$ lautet bei den Mathematikern: Der Logarithmus 2 zur Basis 10 ist 100. -

Damit sind Wachsen (Potenzieren) und Schrumpfen (Wurzelziehen) und sogar das Zeitzählen (Logarithmieren) bei unserer Zauberzahl in einer Schreibweise zusammengefasst. Gelesen wird der Ausdruck $^{2}100_{10}$ am besten so:

Die Grundzahl 10 mit der Hochzahl 2 ergibt 100.

Unser oben verwandtes Beispiel 3^4 stellt sich dann z.B. so dar:

$$^{4}81_{3} \quad \text{oder} \quad ^{4\,\text{sec}}81_{3\,\text{ccm}}$$

81 steht für 81 Urwürfel (je 1^3 cm³)

Daraus ist leicht abzulesen:

$^{4}81_{3}$ ➔

$3^4 = 81$

$\sqrt[4]{81} = 3$

$4 = \log_3 81$

Wir können den **Ausdruck $^{4}81_{3}$** auch noch unter einem anderen Blickwinkel betrachten:

$^{4}\mathbf{y}_{3}$ ➔ **Gesucht** wird die **Raum-Zeit-Zahl y** bei gegebener Grundzahl und Hochzahl.
Die Raum-Zeit-Zahl y wird durch Wachsen oder Potenzieren gefunden:

$$y = 3^4 = \mathbf{81}$$

$^{4}81_{\mathbf{y}}$ ➔ **Gesucht** wird die **Grundzahl y.** Gegeben sind die Raum-Zeit-Zahl und die Hochzahl.
Die Grundzahl y wird durch Schrumpfen oder Wurzelziehen gefunden:

$$y = \sqrt[4]{81} = \mathbf{3}$$

$^{y}81_{3}$ ➔ **Gesucht** wird die Hochzahl oder **Zeitzahl y,** wobei die Raum-Zeit-Zahl und die Grundzahl gegeben sind.
Die Zeitzahl y wird durch das Zählen der Zeit (logarithmieren) gefunden:

$$y = \log_3 81 = \mathbf{4}$$

Damit haben wir **Gleichungen** gebildet. Und wir sehen, dass bei ihnen rechts und links des Gleichheitszeichens stets der gleiche Wert stehen muss. Dieser kann recht verschlüsselt geschrieben sein, wie der Ausdruck [$\log_3 81$] zeigt. – Gleichungen werden oft mit einer Waage verglichen. Auf beiden Waagschalen muss das gleiche Gewicht an Urwürfeln oder der gleiche Zahlenwert lasten. Andernfalls hängt die Waage schief, wir haben es mit einer Ungleichung zu tun. Statt = steht dann zwischen den beiden Seiten > [= größer als] oder < [= kleiner als] [81]

Ein Großteil der Arbeit mit Gleichungen besteht darin, die Verschlüsselung aufzulösen und Fragen durch gefundene Lösungen zu beantworten. Hier ist dies dadurch gelungen, dass ganz rechts schließlich nur noch eine nackte Zahl ohne mathematische ‚Verkleidung' steht. Genau genommen handelt es sich hier um eine Bestimmungsgleichung, weil eine gesuchte Unbekannte (hier y) durch das Auflösen der Gleichung bestimmt wird.[82]

---

[81] Wir lesen in Europa immer von links nach rechts, Wort für Wort. So ist es auch hier. Deshalb steht links und zuerst immer der Wert mit dem verglichen werden soll. Fünf ist größer als drei. $5 > 3$

[82] Außerdem gibt es Identitätsgleichungen (z.B. $a^{\mathbf{n}} \cdot a^{\mathbf{m}} = a^{\mathbf{n+m}}$) sowie Funktionsgleichungen; letztere beschreiben Zusammenhänge zwischen verschiedenen veränderlichen Größen (siehe später: ‚Ausblick: Abbildungen und Funktionen')

5.4 Alle 7 Rechenarten

Wir können nun mit Stolz sagen, dass wir uns bisher nur in den höheren Gefilden des Rechnens bewegt haben. Wir haben **drei höhere Rechenarten,** nämlich das Wachsen (Potenzieren), das Schrumpfen (Radizieren) und das Zählen der Zeit (Logarithmieren) betrachtet.

Mit den **vier Grundrechenarten**, mit dem Zusammenzählen (Addieren), dem Abziehen (Subtrahieren), dem einmaligen Vervielfachen (Multiplizieren) und dem Teilen (Dividieren) haben wir uns noch gar nicht beschäftigt. Und so stellt sich die Frage, ob wir auch diese Grundrechenarten nahtlos und elegant in unsere Würfelwelt einbeziehen können. Die Antwort ist ein klares ‚Ja'.

Denn auch die vier Grundrechenarten sind nichts anderes als **ein Vergrößern oder ein Verkleinern.** Nur die Zeit spielt bei ihnen noch keine Rolle. Es sind nämlich jeweils einmalige Vorgänge.[83] Dagegen handelt es sich bei den höheren Rechenarten um mehrfache Wiederholungen. Und wer etwas wiederholt, der muss mit der Zeit arbeiten. Denn wiederholen kann man nicht gleichzeitig, sondern nur zu einem späteren Zeitpunkt. Ich lerne am Abend meine lateinischen Vokabeln und wiederhole sie am nächsten Morgen vor dem Schulweg beim Frühstück noch einmal. Die vier Grundrechenarten sind nun keine Wiederholungen, sondern jeweils einmalige Vorgänge. Das unterscheidet sie von den höheren Rechenarten.

[83] Man kann die Multiplikation als wiederholtes Dazutun auffassen. 2+2+2 = 3 x 2= 6 Die Division ist dann ein wiederholtes Wegnehmen. Wir bleiben hier wegen der Systematik und der Logik der Würfelwelt beim Bild der zeitlich einmaligen, schlagartigen Vervielfachung bzw. Verkleinerung bei Multiplikation und Division. Es findet nur ein Quantensprung statt; im Unterschied zum Wachsen, wo es zu wiederholten Vervielfachungen der Urwürfel kommt.

Die folgende Übersicht zeigt die sieben Rechenarten auf einen Blick.

Fassen wir die **sieben Rechenarten** als unterschiedliche Vergrößerungen und Verkleinerungen zusammen, dann können wir unterscheiden:

1. **Vergrößern durch** etwas **dazu tun**;
   'etwas' ist eine bestimmte Anzahl von Urwürfeln, Dingen oder Zahlen[84]
   (***Addition*** – Zusammenzählen – etwas ***dazu tun***)

2. **Verkleinern durch** etwas **wegnehmen;**
   (***Subtraktion*** – Abziehen – etwas ***wegnehmen)***

3. **Vergrößern durch Vervielfachen** des Ganzen;
   z.B. verdoppeln, verdreifachen, vervierfachen
   (***Multiplikation*** – Malnehmen – das Ganze (einmal) ***vervielfachen***)

4. **Verkleinern durch** nur einen **Bruchteil** vom Ganzen **nehmen**;
   ein ½; ¼ usw.
   (***Division*** – Teilen – vom Ganzen einen ***Bruchteil nehmen***)

5. **Vergrößern durch Wachsen**;
   mit der Zeit größer werden: gemäß der Zeit- bzw. Hochzahl und dem Maß der Grundzahl
   (***Potenzieren*** – ***Wachsen***)

6. **Verkleinern durch Schrumpfen;**
   bis zur Grundzahl schrumpfen; die Hochzahl zeigt die Zeiteinheiten bis zur Zahl 1 (zum Urwürfel)
   (***Radizieren*** – Wurzelziehen – ***Schrumpfen***)

7. **Die Zeit beim Wachsen zählen;**
   Anzahl der Glockenschläge oder der Wachstumsschübe beim größer Werden zählen.
   (***Logarithmieren*** – beim Wachsen die ***Zeit zählen***)

Unsere Übersicht zeigt uns, dass es für jede Vergrößerung auch eine Verkleinerung als Rechenart gibt. Denn das 'Wegnehmen' ist die Umkehrung des 'Dazutuns', das nur einen 'Bruchteil-Nehmen' die Umkehrung des 'Vervielfachens'.

Wir werden gleich sehen, dass jede Umkehrung der Rechenart zu neuen Zahlenarten führt. Subtraktion zu negativen Zahlen, Division zu Brüchen (vgl. 5.6).

[84] Wir werfen ein Hand voll Äpfel in den Korb.

5.5 Vielfalt der Anwendungsmöglichkeiten der Rechenarten

Bei der Division können wir nun eine für die ganze Mathematik wichtige Feststellung machen: Der Rechenvorgang kann für mehrere, ganz verschiedene Lebensvorgänge eingesetzt werden. Genau genommen bedeutet die Multiplikation die Vervielfachung einer bestimmten Anzahl (beispielsweise von Urwürfeln). Ich sage also drei Urwürfel sollen sich verdreifachen und erhalte dann neun Urwürfel (3 x 3 = 9). Wir können uns den Vorgang auch an der Entstehung neuer Zellen in einem menschlichen Körper vorstellen. Es findet dabei eine Vermehrung durch Zellteilungen statt. Etwas Neues und Zusätzliches wird geschaffen. So müssen wir uns auch die Umkehrung dieser Rechenart, also die Division vorstellen (9 : 3 = 3). Von neun menschlichen Zellen verschwinden zwei Drittel und übrig bleiben ein Drittel oder drei Zellen. Deshalb haben wir diese Rechenart auch nur einen **Bruchteil-Nehmen** genannt. Diesen Vorgang drückt auch gut die arithmetische Schreibweise aus: 9 : 3 = 3. Es bleibt der dritte Teil oder ein Drittel vom Ganzen (1/3) übrig.

Diese Rechenart kann aber auch zum gerechten **Verteilen** genutzt werden. Stellen wir uns vor, wir haben einen Geburtstagskuchen. Acht Kinder sind eingeladen. Nun muss der Vater den Kuchen in acht gleiche Stücke aufteilen, damit jedes Kind den achten Teil oder ein Achtel bekommt. Aus der Sicht eines Kindes heißt das: nur einen Bruchteil, also ein Achtel, zu bekommen. Aus der Sicht des Vaters heißt das, den ganzen Kuchen gerecht auf acht Kinder verteilen. Es verschwindet hier also nichts, wie das beim Beispiel mit den menschlichen Zellen der Fall war. Alle Teile sind noch da, sie werden nur unter verschiedene Besitzer aufgeteilt. Erst wenn sie gegessen sind, sind die Kuchenstücke verschwunden. Textaufgaben in der Schule zeigen die unterschiedlichsten Anwendungsmöglichkeiten der verschiedenen Rechenarten.

5.6 Die Einteilung der Zahlen

Bei der Umkehrung der Rechenarten stoßen wir auf eine weitere wichtige Erkenntnis, die zur Unterscheidung bzw. Einteilung der Zahlen geführt hat.

Beim Zusammenzählen oder etwas Dazutun rechnen wir zunächst mit ganzen und positiven Zahlen. Diese werden auch die **'natürlichen Zahlen'** genannt. Mit ihnen haben die Menschen das Abzählen begonnen. In einem Korb sind zwei Äpfel und ich tue zwei dazu und habe dann vier Äpfel drin.

Wenn wir nun diese Rechenart umkehren und etwas wegnehmen, dann können auch negative ganze Zahlen auftreten. Das einfachste Beispiel ist der Thermometer vor unserem Fenster. An einem Winterabend schauen wir darauf und stellen fest: „Heute Abend ist es kalt, wir haben nur +2 Grad Celsius.“ Als wir um Mitternacht wieder nachsehen, hat sich die Temperatur um fünf Grad verringert; es hat drei Grad minus.

Wir haben also mit der Umkehrung der Addition neben den natürlichen Zahlen als weitere oder erweiterte Zahlenart die 'negativen ganzen Zahlen' entdeckt. Auch die Zahl null auf unseren Thermometer gehört dazu. All die bisherigen positiven und negativen Zahlen einschließlich der Zahl null sind die **'ganzen Zahlen'**.

Nun können wir auch die Vervielfachung umkehren und kommen zur Division. Und während die Multiplikation mit ganzen Zahlen stets wieder zu ganzen Zahlen führt, ist dies bei der Teilung nicht der Fall. Es kann ein Rest übrig bleiben (9 : 5 = 1,8 oder 9 : 5 = 1 $^{4}/_{5}$). Der Rest ist hier der Bruchteil einer ganzen Zahl, nämlich $^{4}/_{5}$ = 0,8. Damit ist die nächste Art von Zahlen entdeckt, nämlich die **'gebrochenen Zahlen'**.

Ganze und gebrochene Zahlen werden unter dem Begriff **'rationale Zahlen'** zusammengefasst. Es wird dabei von einer Erweiterung des Zahlenbereichs gesprochen. Denn im neuen Zahlenbereich müssen erstens alle vorangegangenen Rechenarten bzw. Gleichungen lösbar sein. Und zweitens müssen die neuen Rechenoperationen (hier alle Divisionen) auch lösbar sein.

Wenn wir nun das Wachsen umkehren und einen Raum-Zeit-Körper schrumpfen lassen (die Wurzel ziehen), entdecken wir wieder einen neuen Bereich von Zahlen. Das ist vor allem oft dann der Fall, wenn das Schrumpfen in anderen Schritten geschieht als vorher das Wachsen. Nehmen wir ein Beispiel aus der Würfelwelt. Unsere Zahl 27 besteht aus 27 Urwürfel. Sie sind dadurch entstanden, dass sich der Urwürfel bei drei Glockenschlägen jedes Mal verdreifacht hat ($3^3 = 27$).

Beim Wurzelziehen schrumpft der Raum-Zeit-Wert immer auf die Grundzahl zurück, wenn die Hochzahl beim Wachsen und die Hochzahl beim Schrumpfen, der Wurzelexponent gleich sind. $\sqrt[3]{27} = 3$

Wenn wir nun das Schrumpfen in anderen Schritten vollziehen als das Wachsen, bleibt oft ein Rest. Aus unserer Zahl 27 wollen wir nun nicht die dritte Wurzel, sondern die zweite (Quadratwurzel) ziehen. Das Ergebnis lautet:

$$\sqrt[2]{27} = 5{,}19615\ldots \text{ oder } \sqrt[2]{27} = \sqrt[2]{3 \times 3 \times 3} = 3\,\sqrt[2]{3} = 3\sqrt{3}$$

Dabei wird bei der Quadratwurzel oft die Hochzahl weggelassen; wenn sie fehlt, ist also immer die 2. Wurzel ($\sqrt[2]{} = \sqrt{}$) gemeint. Die Zahl 5,19615… ist ein Dezimalbruch, der unendlich viele Stellen und keine Periode hat.[85] Solche Zahlen nennt man ‚**irrationalen Zahlen'.**

Die rationalen und irrationalen Zahlen werden zu den **‚reellen Zahlen'** zusammengefasst. Dies alles lässt sich in der mathematischen Theorie noch fortsetzen: Es gibt auch **‚imaginäre Zahlen'** (z.B. Wurzel aus minus zwei: $\sqrt{-2}$). Imaginäre und reelle Zahlen werden dann unter dem Oberbegriff **‚komplexe Zahlen'** zusammengefasst und alle Gleichungen mit reellen und imaginären Zahlen sind in diesem Bereich lösbar. Dies gehört aber nicht in diese Hinführung zur Mathe. (Die meisten Leute brauchen das auch nicht mehr im Leben, nur unsere Forscher.)

[85] Periode (griech. Umlauf) bedeutet eine regelmäßige Wiederkehr von Zahlen (z.B. 1,333 … oder 1,454545…)

6 Einige Regeln für die 7 Rechenarten

6.1 Regeln zu den Grundrechenarten

Diese Schrift soll Lust auf Mathe und die Naturwissenschaften machen. Sie soll zeigen, wie schön, spannend und wichtig diese Wissensgebiete sind. Daher werden im Folgenden einige Regeln vorgestellt, die unsere Würfelwelt abrunden, sie sozusagen zur Vertiefung ausnutzen. Bei den Grundrechenarten wird alles erklärt, was zum Verständnis der späteren Darstellungen (z.B. Regeln des Potenzierens) nötig ist. Gezeigt wird, was oft falsch gemacht wird. Das alles ersetzt kein Lehrbuch, das dann vollständig und umfassend den jeweiligen Stoff behandelt. Dazu ist dann das Lernen in der Schule da, aber die Angst davor soll euch genommen werden. Das Folgende ist eine Hinführung, vor allem zu den drei höheren Rechenarten.

6.1.1 Addition und Subtraktion mit positiven und negativen Zahlen

Bei den beiden ersten Rechenarten (Zutun und Wegnehmen) arbeiten wir zunächst nur mit ganzen, aber bereits **positiven und negativen Zahlen**. Bei positiven Zahlen wird häufig das Vorzeichen weggelassen (z.B. 2 statt +2), bei negativen Zahlen steht es immer dabei: (-2) oder -2.

Einige Regeln bereiten oft Schwierigkeiten. Bei genauer Betrachtung sind sie aber ganz einleuchtend:

1. Wer einen negativen Betrag wegnimmt, der tut etwas dazu.
2. Wer einen negativen Betrag dazu tut, der nimmt etwas weg.

Zu 1. Wer einen negativen Betrag wegnimmt, der tut etwas dazu.
Veranschaulichen wir uns das an einem Beispiel. Nehmen wir ein Bankkonto. Dabei heißt ein negativer Betrag in unserem Beispiel Schulden (- a €), ein positiver Betrag ist eine Gutschrift (+ a €). Nehme ich nun von meinem Bankkonto Schulden weg, dann steigt mein Kontostand. Er verbessert sich. Daher gilt: (-5 €) – (-3 €) = - 2 €

Mit Worten: Bei 5 € Schulden werden 3 € Schulden weggenommen. Danach habe ich nur noch 2 € Schulden. [86]

Anschaulich zeigt uns dies auch unser Thermometer. Von minus 5 Grad werden minus 3 Grad weggenommen, dann zeigt der Thermometer nur noch minus 2 Grad.

$$(-5) - (-3) = -2$$

Oder ein anderes Beispiel: $2 - (-3) = 5$ entspricht $2 + 3 = 5$ weil $-(-a) = +a$

Allgemein gilt: Minus (-) und minus (-) ergibt plus (+)

Zu 2. Wer einen negativen Betrag dazu tut, der nimmt etwas weg. Werden nämlich bei einem Bankkonto Schulden hinzugefügt, dann sinkt mein Kontostand. Führe ich einem Thermometer Kälte zu (z.B. Kaltluft aus einem Föhn ohne Heizspirale), dann sinkt die Quecksilbersäule.

Daher gilt: 5 € + (– 3 €) = 2 € entspricht 5 € – 3 € = 2 € weil $+(-a) = -a$

Mit Worten: Meinem Guthaben von 5 € werden Schulden in Höhe von 3 € hinzugefügt. Dann sinkt mein Kontostand auf 2 €.

Allgemein gilt: Plus (+) und minus (–) ergibt (–)

Sofort einleuchtend ist: ***Plus (+) und plus (+) ergibt plus (+)***

Werden einem Bankkonto Gutschriften hinzugefügt, dann steigt der Kontostand. Heiße Luft aus einem Föhn lässt den Thermometer steigen.

[86] Dieser Logik folgen die meisten Sprachen: Die Gastgeberin fragt: „Wollen Sie ein Stück Kuchen?“ „Ni(ch)t ungern“, sagt der schwäbische Gast. Im Schwäbischen bedeutet diese doppelte Verneinung oft ein verstärktes Ja. In einigen Sprache, so oft auch im Bayerischen, ist die doppelte Verneinung aber eine verstärkte Verneinung: „I hob kao Geld net.“ Ich bin ganz arm dran.

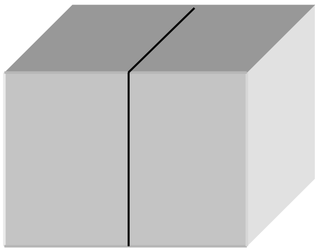
6.1.2 Rechnen mit Brüchen

Wir haben eingangs betont, dass beim Leser keinerlei mathematische Vorkenntnisse vorausgesetzt werden. Außerdem haben wir versprochen, alle Darstellungen anschaulich und leicht verständlich zu gestalten. Das Hauptgewicht dieser Schrift liegt auf den drei höheren Rechenarten (Potenzieren, Radizieren, Logarithmieren), die einen Schwerpunkt der Mittelstufe bzw. Mittelschule bilden. Oft werden die Buben und Mädeln gerade in diesen Jahren der Mathematik entfremdet. Wir wollen zeigen, dass das nicht nötig ist.

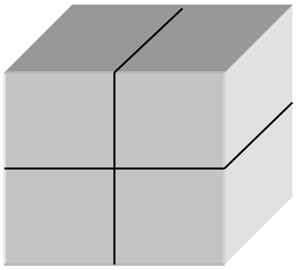
Da wir nachher bei der Darstellung der Regeln für die drei höheren Rechnungsarten auch das **Rechnen mit Brüchen** benötigen, wollen wir die entsprechenden Regeln hier kurz vorstellen. Der kundige Leser kann diese Ausführungen überspringen. Gleichzeitig wollen wir jedoch wieder zeigen, wie anschaulich Mathematik dargeboten werden kann. Insoweit soll auch ein Stück gute Lehrmethode oder – wie die Pädagogik-Professoren heute sagen – qualifizierte Didaktik vorgestellt werden. Auch Eltern, die ihren Kindern helfen wollen, kann das nützen.

Wir wollen dazu einen ***Würfel in zwei, vier oder acht gleiche Bruchstücke zerteilen***.[87]

Würfel wird halbiert



Würfel wird geviertelt



Würfel wird geachtelt

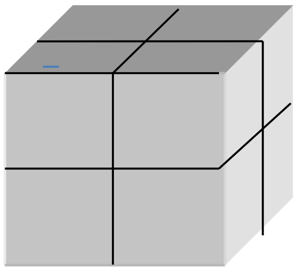


Abb. 6.1

[87] Ein Urwürfel mit den Planck-Längen lässt sich wie oben dargestellt nicht mehr teilen. Versucht man ihn zu teilen, so stellt sich ein Wachstum mit umgekehrten Vorzeichen ein. Wie dies zu verstehen ist, wollen wir später bei den „Abbildungen und Funktionen“ zeigen.

Wir sehen nun sofort, was folgende Gleichungen bedeuten:

$$1 = {}^{1}/_{1} = {}^{2}/_{2} = {}^{4}/_{4} = {}^{8}/_{8} \quad \text{alle Werte entsprechen 1 Würfel}$$

Die Zahl unterhalb des Bruchstrichs benennt die Größe der Bruchstücke oder Bruchteile. Sie sagt uns, ob es sich um Hälften, Viertel oder Achtel handelt. Daher wird diese Zahl **Nenner** genannt. Die Zahl oberhalb des Bruchstriches zählt, wie viele dieser jeweiligen Bruchstücke vorhanden sind. Sie heißt daher **Zähler**.

Unsere Abbildung lässt nun eines sofort erkennen: Erscheint in Nenner und Zähler die gleiche Zahl, dann handelt es sich um einen ganzen Würfel, also die Zahl 1. Diese Erkenntnis lässt sich verallgemeinern und führt uns zu den Rechenvorgängen des Kürzens und Erweiterns.

Ich kann nämlich schreiben:

$${}^{4}/_{4} = {}^{2 \times 2}/_{2 \times 2} = {}^{\cancel{2} \times 2}/_{\cancel{2} \times 2} = {}^{\cancel{2} \times 1}/_{1 \times \cancel{2}} = {}^{1}/_{1} = 1$$

Das bedeutet: Kürzen oder Erweitern verändern den Wert des Bruches nicht!

Den dargestellten Rechenvorgang nennt man **Kürzen.** Denn Ausdrücke mit großen Zahlen können dadurch auf solche mit kleinen Ziffern verkürzt werden, im vorliegenden Fall bis zur Zahl 1. Das Rechenbeispiel zeigt auch, dass es sich hier in allen Fällen um die gleiche Größe, nämlich um unseren obigen Würfel oder die Zahl 1 handelt. Die Zahl 1 tritt nur in unterschiedlicher Verkleidung oder Kostümierung auf.

Oft ist es aber auch nötig, einen Bruch zu **erweitern**, indem Nenner und Zähler mit der gleichen Zahl multipliziert werden. Aus der Abbildung (Abb. 6.1) und dem Rechenbeispiel ist klar ersichtlich, dass dies den Wert an sich auch nicht ändert (2/2 = 8/8). Wir werden gleich beim Addieren und Subtrahieren von Brüchen sehen, dass dort die Erweiterung auf einen gemeinsamen Nenner oft nötig ist.

Aus dem oben dargestellten Würfel ist weiter ersichtlich, dass die Hälfte des Würfels (½) ein Bruchteil von 1, vom Ganzen ist. Ein Bruch ist also auch eine verkürzte Darstellung der Division:

1 : 8 entspricht ${}^{1}/_{8}$ Der Bruchstrich entspricht dem Divisionszeichen.

Es gibt also zwei Schreibweisen für den gleichen Inhalt: 1 : 4 = ${}^{1}/_{4}$ = 0,25

Im nächsten Schritt taucht die Frage auf: Wie kann ich **Brüche zusammen zählen**? Hier müssen wir uns an etwas erinnern, was oben bei der Verallgemeinerung schon gesagt wurde. Wir können nur Gleiches zusammenzählen; Äpfel und Birnen müssen wir auf einen gemeinsamen Nenner bringen. Oben war dies der Begriff ‚Kernobst'. Fürs Bruchrechnen gilt, dass wir nur gleiche Bruchstücke zusammenzählen können, also nur Hälften oder Viertel oder Achtel. Wie groß ein Bruchstück ist, benennt der Nenner. Je größer die absolute Zahl im Nenner, umso kleiner das Bruchstück.

$\frac{1}{2}$ ist größer als $\frac{1}{4}$; in mathematischer Schreibweise: $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$

$\frac{1}{8}$ ist kleiner als $\frac{1}{4}$; in mathematischer Schreibweise: $\frac{1}{8} < \frac{1}{4}$

Haben Bruchteile unterschiedliche Nenner, dann ist der **kleinste gemeinsame Nenner** zu finden. Die Regel ist so geläufig, dass sie sogar in die Umgangssprache Eingang gefunden hat. Oft wird beklagt, dass es bei politischen Entscheidungen nur zu Kompromissen mit „dem kleinsten gemeinsamen Nenner" kommt.

Wir wollen also zusammenzählen:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{2}{8} = ?$$

Wir sehen sofort, der kleinste gemeinsame Nenner ist 8 von $\frac{1}{8}$. Wir müssen also alle Brüche so erweitern, dass sie sich in der Gestalt von Achteln darstellen. Zur Veranschaulichung schauen oben wir auf die **halbierten, gevierteilten und geachtelten Würfel**. Wir erkennen dabei z.B., dass

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$$

Die erweiterte Gleichung lautet dann:

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

Wird der Rechenvorgang ausführlich durchgeführt, dann sind zunächst das Erweitern und dann das Kürzen durchzuführen. Das bedeutet, dass zunächst die Hälften und die Viertel im Nenner und Zähler mit 8 zu multiplizieren sind. Danach wird wieder gekürzt, damit im Nenner nur noch die Zahl 8 auftritt. Dann kann im Zähler einfach abgelesen oder zusammengezählt werden, wie viele von diesen Achtel-Bruchstücken vorliegen und wie das Ergebnis lautet.

Bei Brüchen, bei denen der Zähler größer als der Nenner ist, können gleich die ganzen Zahlen herausgezogen werden. Das zeigt das folgende Beispiel:

$$^{18}/_{8} = {}^{16}/_{8} + {}^{2}/_{8} = 2 + {}^{1}/_{4} = 2{,}25$$

Zu diesem Ergebnis kommen wir auch, wenn wir die Zahl 18 durch die Zahl 8 dividieren

$$18 : 8 = 2{,}25$$

Wir kommen nun zur **Multiplikation von Brüchen**. Wenn wir oben bei unserem Würfel eine Hälfte verdoppeln, so habe wir wieder einen ganzen Würfel oder die Zahl 1. In mathematischer Schreibweise:

$$\tfrac{1}{2} * 2 = \tfrac{1}{2} * {}^{2}/_{1} = {}^{2}/_{2} = 1$$

Die Regel daraus lautet: Brüche werden miteinander multipliziert, indem die Zahlen im Zähler miteinander multipliziert werden und ebenso die Zahlen im Nenner.

Nehmen wir ein anderes Beispiel. Wer zwei Viertele trinkt, der hat insgesamt einen halben Liter getrunken.

$$\tfrac{1}{4} * 2 = \tfrac{1}{4} * {}^{2}/_{1} = {}^{2}/_{4} = \tfrac{1}{2}$$

oder ein anderes Beispiel:

$$\tfrac{1}{2} * \tfrac{1}{4} = {}^{1}/_{8}$$

Was ist jedoch das Ergebnis, wenn ich **einen Bruch durch einen anderen Bruch dividiere**?

$$\tfrac{1}{4} : 2 = \tfrac{1}{4} : {}^{2}/_{1} = ?$$

In diesem Beispiel will ich also ein Viertel nicht verzweifachen bzw. verdoppeln; im Gegenteil, ich will es halbieren. Eine Verdoppelung von einem Viertel ergibt ein Halb, eine Halbierung von einem Viertel ergibt ein Achtel. Wenn ein Viertele Wein auf zwei Gläser verteilt wird, dann bekommt jeder ein Achtele.

$$\tfrac{1}{4} : 2 = \tfrac{1}{4} : {}^{2}/_{1} = {}^{1}/_{8}$$

Mathematisch: Weil das ***Teilen die Umkehrung vom Vervielfachen*** ist, muss ich die Zahl, durch die geteilt wird, auf den Kopf stellen; dann kann ich sie mit dem Bruch multiplizieren.

$$\frac{1}{4} : 2 = \frac{1}{4} : \frac{2}{1} = \frac{1}{4} * \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

Das **Teilen** (nur einen Bruchteilnehmen, die Division) ist die Umkehrung der **Vervielfachung** (Multiplikation). Machen wir uns dies an unserem Würfel klar. Wenn ich eine Würfelhälfte halbiere, dann erhalte ich einen viertel Würfel. Mathematisch geschrieben:

$$\frac{1}{2} : 2 = \frac{1}{2} : \frac{2}{1} = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

Wenn ich also den Bruch (hier: ½) durch 2 teile, wird der Zweier auf den Kopf gestellt (aus $^2/_1$ wird ½). Dann kann ich die Multiplikation anwenden. Denn die Multiplikation ist die Umkehrung der Division.

Nehmen wir ein weiteres Bespiel, das mit Worten weniger leicht auszudrücken ist, aber die Regel anwendet. Ein Viertel geteilt durch ein Achtel ist zwei. Dafür gilt in mathematischer Schreibweise:

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{8} = \frac{1}{4} * \frac{8}{1} = \frac{8}{4} = 2$$

oder

$$0{,}25 : 0{,}125 = 2$$

Mit Worten: In 0,25 (¼) steckt zweimal die Zahl 0,125 ($^1/_8$). Denn: $0{,}125 * 2 = 0{,}25$

Oder: In einem viertel Würfel steckt zweimal ein achtel Würfel.

Das Bruchrechnen brauchen wir gleich beim Ableiten der Regeln für die drei höheren Rechenarten.

6.2 Regeln beim Wachsen: Rechnen mit Potenzen

Rechenregeln verkürzen den Weg beim Rechnen. So heißt die erste Regel beim Wachsen (Potenzrechnen): Potenzen werden multipliziert, indem die Hochzahlen addiert werden. Das wird dann als Formel so geschrieben: $a^m * a^n = a^{m+n}$
Das müsst ihr nun nicht einfach glauben. Nein, in der Mathe muss bei so einer netten, einfachen Formel nachgewiesen werden, dass sie stimmt. Diesen Beweis müssen die Schüler in der Schule verstehen und nachvollziehen können. Da wir schon soweit vorgedrungen sind, werden im Folgenden die Regeln beim Wachsen, Schrumpfen und Zeitzählen samt ihren Beweisen vorgestellt.
Später dürfen Formelsammlungen benutzt werden. Darin kann schnell nachgeschaut werden, wie z.B. die Rechenregel beim Multiplizieren von Potenzen lautet. Die Ableitung oder Beweisführung bleibt uns so erspart, der Rechenweg wird verkürzt.

6.2.1 Potenzieren geht vor Multiplizieren

Eine altbekannte Regel, die schon für die vier Grundrechenarten gilt, heißt:

„***Die höhere Rechenart hat Vorfahrt; sie kommt zuerst dran!***“

Daher heißt es in der Schule: „Die Punktrechnung (Multiplikation und Division) kommt vor der Strichrechnung (Addition und Subtraktion).“ Denn in der höheren Rechenart ist die jeweils niedere in zusammengefasster Form enthalten. Diese Zusammenfassung wirkt wie das Setzen einer Klammer. Und dazu gilt: Was in einer Klammer steht, ist zuerst zu rechnen.

Daher: Potenzieren geht vor Multiplizieren. In allgemeiner Form heißt die Regel:

$$\boxed{ba^n = b \cdot (a^n)}$$

Was in der Klammer steht (also a^n), ist zuerst auszurechnen. Danach wird dieses Ergebnis vervielfacht (hier: mit b multipliziert). Da die höhere Rechenart grundsätzlich vorgeht, ist die Klammer an sich überflüssig. Hier soll aber gerade gezeigt werden, dass die höhere Rechenart einer Zusammenfassung und damit einer Klammersetzung entspricht.

Das zeigt das folgende Beispiel in Zahlen:

$$2 * 3^3 = 2 * (3^3) = 2 * (3 * 3 * 3) = 2 * 27 = 54$$

die Klammer kann weglassen, wer schreibt: $2 * 3 * 3 * 3 = 54$

daher Fehlermeldung: $2 * 3^3 \neq 6^3 = 216$

Durch das Setzen von Klammern können wir die allgemeinen Vorfahrtsregeln außer Kraft setzen; wir können einen davon abweichenden Rechenverlauf anordnen. Das zeigt das folgende Beispiel:

$(2 * 3)^3 = 6^3 = 216$ ➔ Was in Klammern steht, ist zuerst zu rechnen.

6.2.2 Addieren und Subtrahieren: nur bei gleicher Grund- und Hochzahl

Nun kommt eine weitere Regel, die wir in anderer Form schon vom Bruchrechnen und den Ausführungen zur Verallgemeinerung kennen. Zusammenzählen und Wegnehmen, Addition und Subtraktion sind nur bei gleicher Grund- und Hochzahl möglich. Äpfel und Birnen dürfen nicht zusammengezählt werden. Sie müssen zuvor vergleichbar gemacht, als Kernobst zusammengefasst werden. Das bedeutet beispielsweise bei mehrgliedrigen Ausdrücken (Termen), dass nach Möglichkeit Potenzen mit gleicher Grund- und Hochzahl ausgeklammert werden. Sie werden vor oder hinter eine Klammer gesetzt. In allgemeiner Form, wird die Regel wie folgt geschrieben:

$$\boxed{pa^n + qa^n = a^n (p+q)}$$

Die Regel sei nun an einem Beispiel mit Zahlen veranschaulicht:

$$2 * 3^4 + 5 * 3^4 = (2 + 5) 3^4 = 7 * 3^4 = 7 * 81 = 567$$

Ausführlich ist dies so abzuleiten:

$$2 * 3 * 3 * 3 * 3 + 5 * 3 * 3 * 3 * 3 \quad \Rightarrow \text{(Punkt- vor Strich-Rechnung)}$$

$$\Rightarrow (2 * 3 * 3 * 3 * 3) + (5 * 3 * 3 * 3 * 3) = 162 + 405 = 567$$

Die ausführliche und umständlichere Ausrechnung hat gezeigt, dass das Ausklammern von (2 + 5) zu keinem Fehler führt. Die Regel $\boxed{pa^n + qa^n = a^n (p+q)}$ ist also richtig.

aber <u>Fehlermeldung</u>:

$$2^4 + 3^4 \neq 5^4 \quad \text{denn:} \quad 16 + 81 = 97 \neq 5^4 = 624$$

$$\text{auch falsch: } 3^2 + 3^4 \neq 3^6 \quad \text{denn: } 9 + 81 = 90 \neq 3^6 = 729$$

Merksatz aus der Würfelwelt: Wir können nur gleichgroße Würfelberge in einen Korb werfen (zusammenzählen) oder herausnehmen (wegnehmen, abziehen).

6.2.3. Multiplikation von Potenzen mit gleicher <u>Grundzahl</u>: Hochzahlen addieren

Bei der Vervielfachung von Potenzen gilt die Regel: ***Potenzen mit gleicher Grundzahl werden multipliziert, indem die Hochzahlen addiert werden.*** Diese Regel wird ganz augenfällig, wenn wir die Potenzen ausschreiben und dann die Vervielfachungen abzählen. Das zeigt das folgende Zahlenbeispiel. Wer sich also die Regel merkt, der kann sich den ausführlichen und umständlichen Weg ersparen und flink die Hochzahlen zusammenzählen. Das ist einleuchtend, wenn wir an die Würfelwelt denken. Die Hochzahl zählt die Anzahl der Glockenschläge. Und zur richtigen Anzahl kommen wir durch Ab- oder Zusammenzählen der Glockenschläge.

$$3^2 * 3^3 = 3^{2+3} = 3^5 = 243$$

$$3 * 3 * 3 * 3 * 3 = 3^5 = 243$$

Auch hier vereinfacht die Regel das Rechnen. Wer mit Regeln rechnet, kommt schneller ans Ziel. Die Addition der Hochzahlen geht viel schneller als die Multiplikation der Grundzahlen.

In allgemeiner algebraischer Schreibweise lässt sich die Regel wie folgt schreiben:

$$\boxed{a^n * a^m = a^{n+m}}$$

daher <u>Fehlermeldung:</u> $3^2 * 3^3 \neq 3^{2*3} = 3^6 = 729$

6.2.4 Division von Potenzen mit gleicher <u>Grundzahl:</u> Hochzahlen subtrahieren

Die Vervielfachung ist das Gegenteil vom Teilen oder nur einen Bruchteil nehmen. Daher ist die Division von Potenzen das Gegenteil von deren Multiplikation. Dies zeigt sich auch in der entsprechenden Rechenregel. ***Potenzen mit gleicher Grundzahl werden dividiert, indem die Hochzahlen subtrahiert werden.*** Das folgende Zahlenbeispiel beweist diese Rechenregel.

$$\frac{3^6}{3^3} = \frac{3 * 3 * 3 * 3 * 3 * 3}{3 * 3 * 3} = \frac{\cancel{3} * \cancel{3} * \cancel{3} * 3 * 3 * 3}{\cancel{3} * \cancel{3} * \cancel{3}} = 3^3 = 3^{6-3} = 27$$

daher <u>Fehlermeldung</u>:

$$3^{6:3} = 3^2 = 9 \neq \frac{3^6}{3^3} = 3^6 : 3^3 = 729 : 27 = 27 = 3^{6-3}$$

In allgemeiner Schreibweise zeigt die folgende Identitätsgleichung diese Regel.

$$\boxed{\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}}$$

In gleicher Weise, wie die Glockenschläge zum Wachsen führten, bewirken sie nun im Rückwärtsgang das Schrumpfen. Macht euch das klar, denkt etwas darüber nach.

6.2.5 Multiplikation bei gleicher Hochzahl:
Grundzahlen werden multipliziert (Hochzahl bleibt)

Es geht nun darum, Potenzen mit gleicher Hochzahl, aber verschiedenen Grundzahlen miteinander zu multiplizieren (z. B. $2^4 \cdot 5^4$).

Auch diese Regel ist leicht zu durchschauen, wenn die Ableitung ausführlich und schrittweise durchgeführt wird.

$$2^4 \cdot 5^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^4 = 10^4 = 10.000$$

Daraus ergibt sich die Regel: Bei der Multiplikation von Potenzen mit gleicher Hochzahl und unterschiedlicher Grundzahl ***werden die Grundzahlen miteinander multipliziert, die Hochzahl bleibt.***

daher Fehlermeldung: $2^4 \cdot 5^4 \neq 10^{4+4} = 10^8 = 100.000.000 = 100$ Mio.

Die allgemeine Darstellung dieser Regel in algebraischer Form zeigt wiederum die folgende umrandete Gleichung.

$$\boxed{a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m}$$

6.2.6 Division bei gleicher Hochzahl:
Grundzahlen werden dividiert (Hochzahl bleibt)

Da die Division die Umkehrung der Multiplikation ist, muss die nun folgende Regel große Ähnlichkeit mit der vorherigen haben. Tatsächlich gilt bei der Division von Potenzen gleicher Hochzahl und unterschiedlicher Grundzahl: ***Die Grundzahlen werden dividiert, die Hochzahl bleibt.***

Die Ableitung im Zahlenbeispiel sieht folgendermaßen aus:

$\frac{3^4}{5^4} = \frac{81}{625} = \left[\frac{3}{5}\right]^4 = 0{,}6^4 = 0{,}1296$

In allgemeiner und algebraischer Form hat die Gleichung folgendes Aussehen:

$$\frac{a^n}{b^n} = \left[\frac{a}{b}\right]^n$$

6.2.7 Potenzieren einer Potenz: Hochzahlen werden multipliziert

Um eine Potenz zu potenzieren, müssen die ***Hochzahlen miteinander multipliziert werden.***

Die Regel lässt sich ableiten, indem die Potenz, die potenziert werden soll, in Klammern gesetzt wird. Was in Klammern steht, ist zuerst zu rechnen. Die Ableitung zeigt das folgende Zahlenbeispiel.

$$(2^2)^3 = (2 * 2)^3 = (2 * 2) * (2 * 2) * (2 * 2) = 2^{2*3} = 2^6 = 64$$

daher Fehlermeldung: $(2^2)^3 \neq 2^{2+3} = 2^5 = 32$

In der Würfelwelt sieht ist das so: Der Würfelberg ($2^2 = 4 = 4^1$) wächst noch zweimal mit Wachstumsschritten der Größe 4 ➔ $4 * 4 * 4 = 4^3 = 64$ (Der erste Wachstumsschritt führte zu 4^1)

Oder: Die Würfelstange mit 4 Urwürfeln (4^1) vervierfacht sich noch zweimal zu: 4^3 Das ist auch als klassischer Würfel mit Kantenlängen von je 4 cm darstellbar.

In allgemeiner und algebraischer Form sieht die Regel folgendermaßen aus:

$$\boxed{(a^n)^m = a^{nm}}$$

6.3 Regeln beim Schrumpfen: Rechnen mit Wurzeln

6.3.1 Die Wurzel als Raum-Zeit-Zahl mit gebrochener Hochzahl

Das Potenzieren ist wie oben ausführlich dargestellt ein Wachsen, das Radizieren ist ein Schrumpfen. Und das Schrumpfen ist die Umkehrung des Wachsens. Genauso ist die Bruchrechnung die Umkehrung der Vervielfachung. Da das Wurzelziehen ein Schrumpfen ist, können wir den Wurzelausdruck auch als Ausdruck mit gebrochener Hochzahl (Potenz) schreiben, wie das folgende Beispiel zeigt.

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \;=\; a^{1/n}}$$

Als Hoch- oder Zeitzahl zeigt der Bruch (1/n) die Anzahl der Schrumpfungen bis zum Urwürfel an; so wie eine ganze Hochzahl die Anzahl der Wachstumsschübe oder Glockenschläge ab dem Urwürfel darstellt.

Das lässt sich auch aus dem folgenden **Zahlenbeispiel** ableiten.

$$\sqrt[3]{27} \;=\; 27^{1/3} \;=\; 3$$

$$\sqrt[3]{3 * 3 * 3} = (3 * 3 * 3)^{1/3} = 3$$

Teilen wir nämlich die Zahl 27 (3^3) zweimal hintereinander durch 3, dann erhalten wir 3 oder 3^1 ($3^{3-2=1}$). Teilen wir das Ergebnis ein drittes Mal durch 3, so ergibt dies die Zahl 1 = 3^0 oder den Urwürfel ($3^{3-3=0}$). (Beim Wachsen ist es umgekehrt. Es sind bei der Grundzahl 3 genau 3 Wachstumsschübe bzw. Vervielfachungen, um von der Zahl 1 (Urwürfel 3^0) bis zur Zahl 27 oder zu dem Raum-Zeit-Körper bzw. Würfelberg aus 27 Urwürfeln zu gelangen.)

Das Schrumpfen von 27 (3^3) ist auch so ablesbar: $3^{3-2=1}$ und $3^{3-3=0}$

6.3.2 Addieren und Subtrahieren: nur bei gleicher Raum-Zeit-Zahl (Radikand) und gleicher Hochzahl (Wurzelexponent)

$$\boxed{p \sqrt[n]{a} + q \sqrt[n]{a} = (p + q) \sqrt[n]{a}}$$

in Zahlen: $2 * \sqrt[3]{27} + 5 * \sqrt[3]{27} = (2 + 5) * \sqrt[3]{27} = 7 * \sqrt[3]{3 * 3 * 3} = 7 * 3 = 21$

oder $2 * 27^{1/3} + 5 * 27^{1/3} = (2 + 5) * 27^{1/3} = 21$

<u>Siehe dazu die Ableitung oben bei 6.2.2 (Addieren und Subtrahieren von Potenzen)!</u>

6.3.3 Multiplikation von Wurzeln mit gleicher <u>Raum-Zeit-Zahl</u> (Radikanden): Hochzahlen (Wurzelexponenten) als Brüche addieren

$$\boxed{\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{a} = \sqrt[nm]{a^{n+m}}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{a} = a^{1/n} * a^{1/m} = a^{1/n + 1/m} = a^{m+n/nm} = \sqrt[nm]{a^{m+n}}}$$

Es ist hier die Addition von Brüchen durchzuführen. (Kleinster gemeinsamer Nenner!)

Dazu ist der kleinste gemeinsame Nenner zu bilden (z.B. 1/3 + 1/4 = 4/12 + 3/12 = 7/12). Gegebenenfalls sollten die oben vorgestellten Regeln zum Bruchrechnen (6.1.2) wiederholt werden!

Ein weiteres Beispiel in Zahlen:[88]

$$\sqrt[3]{4096} * \sqrt[4]{4096} = \sqrt[3]{16^3} * \sqrt[4]{8^4} = 16 * 8 = 128$$

$$4096^{1/3} * 4096^{1/4} = 4096^{1/3 + 1/4 = 4/12 + 3/12 = 7/12} = 128$$

[88] Bei diesen Werten empfiehlt sich der Taschenrechner (z.B. $4096^{7/12} = 128$)

Bei unmittelbarer Anwendung der Regel:

$$\boxed{\sqrt[n]{a} * \sqrt[m]{a} = \sqrt[n\,m]{a^{n+m}}}$$

$$\sqrt[3]{4096} \cdot \sqrt[4]{4096} = \sqrt[3*4]{4096^{3+4}} = \sqrt[12]{4096^{7}} = \sqrt[12]{(2^{7})^{12}} = 2^{7} = 128$$

<u>Nebenrechnung</u>: $(2^7)^{12} = 128^{12} = 19342813113834066795298816 = 4096^7$

oder

$\sqrt[12]{19342813113834066795298816} = 128$ (wie der Taschenrechner zeigt)

6.3.4 Division von Wurzeln mit gleicher Raum-Zeit-Zahl (Radikanden): Hochzahlen (Wurzelexponenten) als Brüche subtrahieren

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\,m]{a^{m-n}}$$

Hier ist die Subtraktion von Brüchen durchzuführen:

zur Wiederholung: $^1/_3 - ^1/_4 = ^4/_{12} - ^3/_{12} = {}^{4-3}/_{3*4} = ^1/_{12}$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = a^{1/n} : a^{1/m} = a^{1/n - 1/m} = a^{m-n/n\,m} = \sqrt[n\,m]{a^{m-n}}}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[n\,m]{a^{m-n}}}$$

in Zahlen:

$$\frac{\sqrt[3]{4096}}{\sqrt[4]{4096}} = \frac{\sqrt[3]{16^3}}{\sqrt[4]{8^4}} = \frac{16}{8} = 2$$

Und die Anwendung der Regel $\boxed{\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[n\,m]{a^{m-n}}}$ führt zum gleichen Ergebnis:

$\sqrt[3]{4096} : \sqrt[4]{4096} = 4096^{1/3} : 4096^{1/4} = 4096^{1/3 - 1/4} = 4096^{3-4/4*3} = \sqrt[4*3=12]{4096^{4-3=1}}$

$= \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$ denn: $2^{12} = 4096$

6.3.5 Multiplikation bei gleicher <u>Hochzahl</u> (Wurzelexponenten): Raum-Zeit-Zahlen (Radikanden) werden multipliziert (Hochzahl bleibt)

$$\boxed{\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a\,b}}$$

in Zahlen (vgl. dazu die Ableitung zur Potenzregel 6.2.5):

$\sqrt[3]{8} * \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{2^3} * \sqrt[3]{3^3} = 2 * 3 = 6$

oder

$\sqrt[3]{8} * \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{8 * 27} = \sqrt[3]{216} = 6$

6.3.6 Division bei gleicher <u>Hochzahl</u> (Wurzelexponenten): Raum-Zeit-Zahlen (Radikanden) werden dividiert (Hochzahl bleibt)

$\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{a / b}$ denn $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \dfrac{a^{1/n}}{b^{1/n}}$

in Zahlen (vgl. dazu die Ableitung zur Potenzregel 6.2.6):

$\sqrt[3]{8} : \sqrt[3]{27} = 2 : 3 = 2/3$ denn $\sqrt[3]{8} = 2$ und $\sqrt[3]{27} = 3$

oder

$\sqrt[3]{8/27} = \sqrt[3]{2^3/3^3} = 2/3$

6.3.7 Radizieren einer Wurzel: Hochzahlen (Wurzelexponenten) werden multipliziert

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m*n]{a}}$$

Wir lassen den Würfelberg (a) genau m-mal schrumpfen; das Ergebnis schrumpft dann weitere n-mal. Nun ist zu beweisen, dass das zur obigen Formel führt.

in Zahlen (vgl. auch die Ableitung zur Potenzregel 6.2.7):

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2 * 2 * 2 * 2} = 2$ und $\sqrt[4*3]{4096} = \sqrt[12]{4096} = 2$

Bei unmittelbarer Anwendung der Regel $\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m*n]{a}}$ kommen wir zum gleichen Ergebnis:

$\sqrt[4]{\sqrt[3]{4096}} = \sqrt[12]{4096} = \sqrt[12]{2^{12}} = 2$ denn $2^{12} = 4096$

6.3.8 Potenzieren einer Wurzel: Raum-Zeit-Zahl (Radikanden) potenzieren

Eine Wurzel ($\sqrt[n]{a}$) wird m-mal potenziert, indem man die Raum-Zeit-Zahl (Radikanden) m-mal potenziert; dann kann die Wurzel gezogen werden. – Oder: Wir lassen den Würfelberg (a) m-mal wachsen; das Ergebnis dann n-mal schrumpfen. Das entspricht dem Potenzieren des Wurzelausdrucks: $(\sqrt[n]{a})^m$

$$\boxed{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$$

In Zahlen:

$(\sqrt[3]{8})^4 = 2^4 = 16$ (Was in Klammer steht, ist zuerst zu rechnen: $\sqrt[3]{8} = 2$, dann wächst das Ergebnis (2), es wird potenziert: $2^4 = 16$)

Die unmittelbare Anwendung der Regel $\boxed{(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}}$ führt zum gleichen Ergebnis:

$(\sqrt[3]{8})^4 = \sqrt[3]{8^4} = \sqrt[3]{4096} = \sqrt[3]{16 * 16 * 16} = 16$ denn $16^3 = 4096$

6.4 Regeln beim Zählen der Zeit: Rechnen mit Logarithmen

6.4.1 Multiplikation von Logarithmen mit gleicher Grundzahl (Basis)

Die Logarithmen nennen wir Zeitzähler. Sie zeigen beim Wachstum die Anzahl der Wachstumsschübe oder der Vervielfachungen oder – wie wir sagten – der Glockenschläge an.

Oben unter Punkt 6.2.3. haben wir die Potenzregel für die Multiplikation vorgestellt: Potenzen mit gleicher Grundzahl werden multipliziert, indem die Hoch- bzw. Zeitzahlen addiert werden.[89]

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$$

Es ist daher zu vermuten:

$$\log_2 (2 * 3) = \log_2 2 + \log_2 3 = \log_2 5$$

Die Logarithmen als Zeitzähler entsprechen nun den Hochzahlen (Exponenten), die wir auch Zeitzahlen genannt haben. Spontan und gefühlsmäßig müsste daher die Multiplikation von Zeitzählern (Logarithmen) dem gleichen Grundsatz folgen wie die Multiplikation von Potenzen mit gleicher Grundzahl (siehe oben 6.2.3). Und tatsächlich gilt: ***Logarithmen mit gleicher Grundzahl werden durch Addition miteinander multipliziert.*** Die Regel lautet in allgemeiner Form:

$$\boxed{\log_a (u * v) = \log_a u + \log_a v}$$

Wir haben diese Regel hier mehr oder weniger gefühlsmäßig und spontan „vermutet“. Wir haben die Hypothese aufgestellt, dass die Regel so lauten müsste. Damit geben sich Mathematiker allerdings nicht zufrieden. Sie verlangen für einen Nachweis die untrügliche Ableitung durch Identitätsgleichungen.

---

89 Die Regel wurde dadurch bewiesen, dass der Ausdruck ausmultipliziert wurde: $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$

Das wollen wir mit einem Zahlenbeispiel durchführen.

(1)	**8** = $\log_2 256$ =	Die Zauberzahl dazu: *${}^{8}256_2$* ➔ *$2^8 = 256$*
(2)	$\log_2 (4 * 64)$ =	denn *$(4 * 64) = 256$*
(3)	$\log_2 4 + \log_2 64 = 2 + 6 =$ **8**	denn *$\log_2 4 = 2$* und *$\log_2 64 = 6$*
		➔ *${}^{8}256_2 = {}^{8}(4 * 64)_2 = {}^{8}(2^2 * 2^6)_2$*

Als einheitlichen Wachstumsschub haben wir die Grundzahl 2. Nun schlägt die Glocke zuerst 2-mal; dann besteht der Würfelberg aus 4 Urwürfel. Schlägt die Glocke noch weitere 6-mal, hat sie insgesamt 8-mal geschlagen; der Würfelberg besteht aus 256 Urwürfeln ($2^8 = 256$). 8 ist die Zeitzahl oder Logarithmus von 256 zur Basis 2.

6.4.2 Division von Logarithmen mit gleicher Grundzahl (Basis)

Auch hier müssten nun spontan und gefühlsmäßig die gleichen Regeln gelten wie bei der Division von Potenzen (siehe oben 6.2.4). Und tatsächlich gilt: ***Logarithmen mit gleicher Grundzahl werden durch Subtraktion dividiert.*** Die Regel lautet in allgemeiner Form:

$$\boxed{\log_a (u : v) = \log_a u - \log_a v}$$

Das Zahlenbeispiel zeigt dies:

(1) **4** = $\log_2 {}^{64}/_{4} = \log_2 16$ denn *$64 : 4 = 16$* und die Zauberzahl dazu: *${}^{4}16_2$*

(2) $\log_2 64 - \log_2 4 = 6 - 2 =$ **4** denn *$6 = \log_2 64$* und *$2 = \log_2 4$* und *${}^{6}64_2$* und *${}^{2}4_2$*

Sonderfall:

(1) $\log_2 1 : 3 = \log_2 1 - \log_2 3$

(2) $0 - \log_2 3 = -\log_2 3$ *denn $0 = \log_2 1$, weil 1^0 immer der Urwürfel ist:*
${}^{0}1_2 \equiv 1^2$ (siehe oben 3.2 und 3.3)

(3) allgemein: $\boxed{\log_a (1 : v) = -\log_a v}$

6.4.3 Potenzieren eines Logarithmus

Wir erinnern uns wieder an die Potenzrechnung (oben unter 6.2.7): Um eine Potenz zu potenzieren, müssen die Hochzahlen miteinander multipliziert werden.

$$(2^2)^3 = 2^{2*3} = 2^6 = 64$$

$$\boxed{\log_a (u^n) = n \cdot \log_a u}$$

Hier heißt die Regel: ***Der Logarithmus einer Potenz ist gleich dem Produkt aus dem Exponenten (hier n) und dem Logarithmus der Grundzahl (hier $\log_a u$).***

Es geht hier darum, den Würfelberg (u) weitere n-mal wachsen zu lassen (u^n). Danach ist die Zeitzahl (Logarithmus) des neuen, größeren Würfelbergs zu ermitteln. Das ist dann der potenzierte Logarithmus. Wir können auch sagen, es ist die neue Zeitzahl des vergrößerten Würfelberges.

Wir erinnern uns an die etwas verwirrende Ausdrucksweise bei den Logarithmen:

$n = \log_a b$ wird gelesen: **n ist der Logarithmus von b zu Basis a**
$n = \log_a b$
n ➔ ist der **Logarithmus** oder Zeitzähler (entspricht der Hoch- und Zeitzahl)
a ➔ ist die **Basis** oder Grundzahl (Größe der Wachstumsschritte)
b ➔ heißt **Numerus** (entspricht Raum-Zeit-Zahl, Würfelberg oder Potenzwert)

Das Potenzieren des Logarithmus geschieht nun dadurch, dass die alte Zeitzahl (Logarithmus = $\log_a u$) mit der neuen Zeitzahl (n) multipliziert wird. Die dazu gefundene Formel steht oben im Kasten: $n * \log_a u$

Es ist nun zu beweisen, dass diese Formel stimmt.

Wir nehmen dazu ein Zahlenbeispiel:

$3 = \log_2 8$ ➔ ${}^{3}8_2$ Der Würfelberg von 8 Urwürfeln soll wachsen auf: 8^2

Wie heißt dann die neue Zeitzahl (Logarithmus)? Sie ist die gesuchte Unbekannte: y

$y = \log_2 (8)^2$ ➔ Würfelberg (8) verachtfacht sich: $8^2 = 8 * 8 = 64$

Neuer Würfelberg besteht aus 64 Urwürfeln und es gilt: ${}^{?}64_2$ oder ${}^{y}64_2$

Wir wollen nun die Anzahl der Glockenschläge wissen, die zu diesem neuen Würfelberg (64 Urwürfel) führt.

Das zeigt die Zauberzahl: ${}^{6}64_{2}$

Es sind: 6 Denn $64 = 2^6$ Und die neue Gleichung lautet:

$6 = \log_2 64$ Der ursprüngliche Logarithmus, die Zeitzahl 3 wurde potenziert $(3^3)^2 = 3^{3 * 2 = 6}$

Die Rechnung nach Formel führt zum gleichen Ergebnis:

$y = \log_2 (2^3)^2 = \log_2 2^{3 \times 2 = 6} = 6$ oder

$2 * \log_2 2^3 = 6$ denn: $\log_2 2^3 = 3$ und $2 * 3 = 6$

Die folgenden Identitätsgleichungen zeigen dies auch:

(1) $\mathbf{6} = \log_2 64 = \log_2 2^6$ = *denn* $64 = 2^6$ *und es gilt:* ${}^{6}64_{2}$

(2) $\log_2 (2^3)^2 = \log_2 2^{3 * 2} = 6$ = *denn* $2^6 = (2^3)^2 = 2^{3 * 2}$ *(➔ Potenzregel 6.2.7)*

(3) $2 \cdot \log_2 2^3 = 2 \cdot 3 = \mathbf{6}$ *denn* $\log_2 2^3 = 3$

Weiteres Beispiel als Denksport; mit Taschenrechner zu lösen:

(4) $64^2 = (2^6)^2 = 2^{12}$

(5) $\mathbf{12} = \log_2 2^{12} = \log_2 64^2$ *denn* $2^{12} = 64^2 = 4096$ *oder* ${}^{12}4096_{2}$

(6) $2 \cdot \log_2 64 = 2 \cdot 6 = \mathbf{12}$ *denn* $\log_2 64 = 6$ *oder* ${}^{6}64_{2}$

6.4.4 Radizieren eines Logarithmus

Nun wollen wir einen Logarithmus nicht potenzieren, sondern radizieren, die Wurzel ziehen, also in die Schrumpfung des Würfelbergs, des Radikanden eintreten. Die Uhr läuft rückwärts. Wir nehmen nun einen Bruchteil der ursprünglichen Zeit, einen Teil der Glockenschläge (1/n). Denn beim Schrumpfen geht es zurück bis zur Grundzahl (a^1), aber nicht bis zum Urwürfel (a^0).

Nach allem, was wir bisher wissen, muss das zu einer Division führen; d.h. wir nehmen einen Bruchteil vom Zeitzähler. Und die allgemeine Regel lautet daher:

$$\boxed{\log_a \sqrt[n]{u} = 1/n * \log_a u}$$

Wir erinnern uns an die Ausdrücke beim Wurzel ziehen:

$\sqrt[n]{a}$ Wurzel

a › 0 **Radikand**, die Zahl aus der die Wurzel gezogen werden soll (entspricht dem Raum-Zeit-Körper oder dem Potenzwert)

n › 1 **Wurzelexponent** (entspricht der Hoch- oder Zeitzahl, Exponent)

$\sqrt[n]{a} = b$

b **Wurzelwert** (oder kurz n-te Wurzel) (entspricht der Grundzahl oder Basis)

Danach ist der ***Logarithmus einer Wurzel gleich dem Bruch (Quotienten) aus dem Logarithmus des Radikanden (hier: $\log_a$ u) durch die Hochzahl (Wurzelexponenten; hier: n).***

$$\frac{\log_a u}{n} = 1/n \cdot \log_a u = \log_a \sqrt[n]{u}$$

Dazu ein Zahlenbeispiel:

Ausgangsgleichung:

$\log_2 64 = 6$

Aufgabe:

Ziehe aus dem Radikanden (Würfelberg) die 3. Wurzel: $\sqrt[3]{64}$ ➔ $\log_2 \sqrt[3]{64} = ?$
Wie heißt die neue Zeitzahl oder der Logarithmus nach dem Schrumpfen?

Rechenvorgang:

$y = \log_2 \sqrt[3]{64} = \log_2 \sqrt[3]{2^6}$ denn: $64 = 2^6 = 4^3$ und $\sqrt[3]{4^3} = 4$

$\log_2 \sqrt[3]{2^6} = \log_2 4$ denn: $\sqrt[3]{2^6} = 4$

$\log_2 4 = 2$ denn: $^{2}4_{2}$

Rechenvorgang nach Formel: $\boxed{\log_a \sqrt[n]{u} = 1/n * \log_a u}$

$\log_2 \sqrt[3]{64} = 1/3 * \log_2 64 = \frac{\log_2 64}{3} = \frac{6}{3} = 2$ denn: $\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6$ und $^{6}64_{2}$

Identitätsgleichungen:

(1) $\mathbf{2} = \log_2 \sqrt[3]{64} = 1/3 \cdot \log_2 64$

(2) $1/3 * \log_2 2^6 = 1/3 * 6 = \mathbf{2}$ denn $64 = 2^6$ und $6 = \log_2 2^6$ und $^{6}64_{2}$

7 Ausblick: Abbildungen und Funktionen

In der Übersicht lässt sich der Mathe-Stoff (ohne Raumlehre bzw. Geometrie) so einteilen: In den unteren Klassen der Mittelschule sind „Dreisatz, Prozente, Zinsen" das Kernstück des Lernfachs, also Ausformungen der Grundrechenarten. Danach kommen die drei höheren Rechenarten (Wachsen, Schrumpfen, Zeitzählen). In der Oberstufe sind Differenzieren und Integrieren der Schwerpunkt.

Die höhere Mathe mit Differenzieren und Integrieren gehören nicht mehr zu dieser Ein- und Hinführung. Ich kann sie auch nicht so anschaulich und begreifbar mit Würfeln darstellen wie die höheren Rechenarten. Vielleicht gelingt das einmal jemand anderem. Doch im weitesten Sinne geht es auch hier um ein Vergrößern und Verkleinern. Beim Differenzieren wird das Steigungsmaß einer Kurve gemessen. Wir können auch sagen, es wird dargestellt, wie schnell Kurve und Funktion wachsen oder schrumpfen. Die Integration ist die Umkehrung der Differenzialrechnung.

Alles lässt sich vertiefen, bis zur Unbegreiflichkeit steigern. Die Frage ist: Wieviel Mathe brauchen wir in den jeweiligen Berufen (z. B. MINT-Berufen). Danach richtet sich, wieviel Mathe wir in Ausbildung und Studium brauchen. Und daraus ergibt sich, wieviel Mathe wir schon in der Schule lernen müssen. Andernfalls wären wir wieder bei Adam Smith, dem Vater der Wirtschaftswissenschaften, der schon 1776 klagte: „Das meiste jedoch, was an Schulen und Universitäten unterrichtet wird, scheint nicht die beste Vorbereitung für dieses Berufsleben zu sein."[90]

Die Darstellung der Zahlen mit Würfeln, war eine Veranschaulichung oder Abbildung der Zahlenwelt durch die Würfelwelt. Jeder Urwürfel bildet die Zahl $1^3 = 1$ ab. Auch die Rechenvorgänge wurden in dieser Würfelwelt veranschaulicht. Nun können unsere Vergrößerungen oder Verkleinerung, das Wachsen oder Schrumpfen noch anders dargestellt werden. Das gilt sowohl für die reinen Zahlen als auch für die bildliche Darstellung. So kann das Wachsen oder Schrumpfen in Form einer Funktion beschrieben werden (arithmetische Darstellung). Wir können ein Wachsen oder Schrumpfen aber auch durch eine Kurve abbilden (grafische Darstellung).

[90] Smith, Adam, Der Wohlstand der Nationen, Eine Untersuchung seiner Natur und seiner Ursachen, London (1776) 1789 (übersetzt v. Claus Recktenwald), München 1974, S. 656

Dabei zeigt eine **Funktion** einen zwingenden Zusammenhang zwischen zwei veränderlichen Werten: $y = f(x)$ - Die Funktion kann dann als Kurve in ein Koordinatenkreuz eingezeichnet werden. Das wollen wir uns noch ansehen.

Wir haben in dieser Schrift das Rechnen mit Potenzen, Wurzeln und Logarithmen als Wachsen, Schrumpfen und die Zeit zählen in unserer Würfelwelt veranschaulicht. Wir haben auch den Begriff der **Gleichung** eingeführt. Dabei steht rechts und links des Gleichheitszeichens der gleiche Wert in unterschiedlicher mathematischer Gestalt (z. B. $64 = 2^6$ *oder* $6 = \log_2 64$ *oder* $2 = \sqrt[6]{64}$ *vergleiche*: ${}^{6}64_{2}$).

Eine Funktion wird allgemein geschrieben als

$$y = f(x)$$

f bedeutet **Funktion** und sagt uns, dass zwischen y und x ein eindeutiger mathematischer Zusammenhang besteht. Dabei ist x die Stellschraube, an der gedreht oder verändert wird. Das Drehen führt dann zu zwangsläufigen Ergebnissen oder Änderungen bei y. Es wird auch gesagt: x ist die ‚willkürliche Veränderliche' und y die davon ‚abhängige Veränderliche'. Die ‚Veränderliche' heißt auch ‚Variable'.

Nehmen wir als Beispiel ein gleichmäßiges, stetiges Wachsen unseres Würfelbergs mit der Grundzahl 2. Die Funktion $y = f(x)$ sieht als Funktionsgleichung dann so aus:

$$y = 2^x$$

Der Beginn entspricht unserem wachsenden Würfelberg oben in Abbildung 3.7

Wir können auch sagen die Zeitzahl x ist die die Glocke, an der geläutet wird. Jeder Glockenschlag zeigt dann an, dass die zwangsläufigen Vergrößerungen des Würfelbergs stattgefunden haben. Der Zeiger ist in der vorgegebenen Zeit vorgerückt und der Würfelberg gewachsen (also keine Quantensprünge, sondern stetiges Wachsen).

Nun lassen sich solche Rechenvorgänge und Funktionsgleichungen nicht nur in der Würfelwelt bildlich darstellen. René Descartes (lat. Cartesius 1596 – 1650) hat das heute allgemein übliche **kartesische Koordinatensystem** erfunden. Dort lassen sich Funktionsgleichungen der unterschiedlichsten Art als Kurven einzeichnen.

In seiner einfachen und üblichen Form besteht das kartesische Koordinatensystem aus einem **rechtwinkligen Achsenkreuz** mit der waagrechten x-Achse (Abszisse) und der senkrechten y-Achse (Ordinate). Darauf werden jeweils die x-Werte und die y-Werte einer Funktionsgleichung abgebildet. Dabei durchläuft der x-Wert einen vorgegebenen Zahlenbereich. Der y-Wert zeigt das Ergebnis, das sich daraus ergibt.

Das Ganze findet in der Regel auf einem Blatt Papier statt und damit in der ersten Ausdehnungsart oder Dimension. Es werden also Linien gezeichnet, die man allgemein **Kurven** nennt. Wenn der Verlauf einer Kurve nach gewissen Regeln erörtert wird (z.B. ihr Steigungsmaß), dann heißt das ‚Kurvendiskussion'. Das soll nicht vertieft werden; es führt über den Rahmen dieser Schrift hinaus.

Hier soll aber gezeigt werden, dass sich unsere drei höheren Rechenarten auch im kartesischen Koordinatensystem darstellen lassen. Diese Übertragung einer Gleichung aus der reinen Zahlenwelt in ein Koordinatensystem nennen die Mathematiker **‚Abbildung der Funktion'**.

Am einfachsten können wir aus einer Gleichung eine Abbildung erstellen, indem wir zunächst eine **Wertetabelle** anlegen. Nehmen wir dazu die ganz einfache Gleichung

$$y = 2x + 1$$

Für unsere Wertetabelle setzen wir nun in die Gleichung für x die Werte -1, 0, 1 und 2 ein und erhalten folgende Tabelle:

x	- 1	0	1	2
y	-1	1	3	5

Wenn wir diese Werte in unser Koordinatensystem eintragen, dann erhalten wir zunächst nur Punkte. Wir können aber für x nicht nur ganze natürliche Zahlen, sondern auch die Zwischenwerte und sogar negative Zahlen einfügen. Dann erhalten wir eine stetige Kurve. Sie ist hier eine Gerade, die je Einheit auf der x-Achse um 2 Einheiten auf der y-Achse ansteigt. Es heißt dann, sie hat das Steigungsmaß 2.

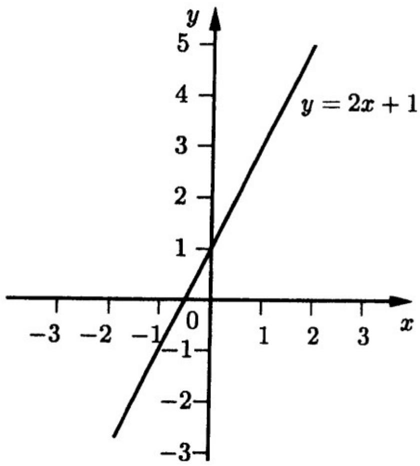


Abb. 7.1

Eine Funktion der eben abgebildeten Art wird **lineare Funktion** genannt. Das bedeutet, sie verläuft geradlinig wie mit einem Lineal gezogen. Die Abbildungen der drei höheren Rechenarten zeigen jedoch keinen geradlinigen Verlauf. Sie sind gekrümmt und damit Kurven auch im allgemein üblichen Sprachgebrauch. Sie werden Wurzel-, Exponential- oder Logarithmusfunktionen genannt. Dazu müssen z.B. bei den Potenzfunktionen die Exponenten (bzw. Hochzahlen) als x-Werte einen festgelegten (definierten) Zahlenbereich durchlaufen (z.B. $y = 2^x$). Bei den logarithmischen Funktionen ist der Numerus (Würfelberg) der x-Wert (z.B. $y = \log_2 x$). Beide Funktionen zeigen die folgenden Wertetabellen und dann die Abbildungen.

x $y= 2^x$	**- 3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
y	**0,125**	**0,25**	**0,5**	**1,0**	**2,0**	**4,0**	**8,0**

y $y = \log_2 x$	**- 3**	**-2**	**-1**	**0**	**1**	**2**	**3**
x	**0,125**	**0,25**	**0,5**	**1,0**	**2,0**	**4,0**	**8,0**

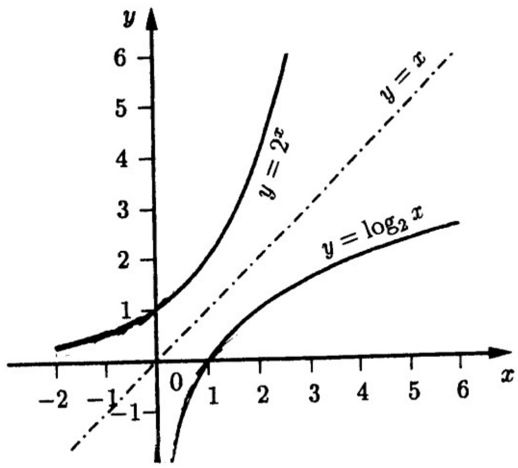


Abb. 7.2

Wir haben die Abbildung wieder als durchgezogene Kurve gezeichnet. Die Hochzahl nimmt also nicht nur natürliche Zahlen an, sondern auch alle dazwischen liegenden Werte. Sie wächst hier sozusagen nicht in Quantensprüngen, sondern stetig. Bei den ganzen und positiven x-Werten liegen allerdings jedes Mal jene Werte vor, die wir oben aus der Würfelwelt kennen. Das wird deutlich bei x = 0 in der Gleichung $y = 2^x$. Hier nimmt y den Wert 1 an x den Wert 0 Denn es gilt: $1 = 2^0$ Das ist in unserer Würfelwelt der erste Urwürfel, der Ursprung, in dem alle Zahlen stecken.

Nun wird in der Abbildung unsere Funktion $y = 2^x$ links der y-Achse (Ordinate), also bei negativen x-Werten (-1, -2, -3), kleiner als 1. Sie nähert sich im Unendlichen der x-Achse (Abszisse).

Das passt nicht zu unserer Würfelwelt. Denn oben wurde gesagt, dass nichts kleiner als der Urwürfel werden kann. Und dazu wurden die Astrophysiker zitiert. Alle Versuche, einen Körper unter die Planck-Länge schrumpfen zu lassen, scheitern und enden in einer neuen Expansion (4.1.Der geheimnisvolle Ursprung).[91]

---

[91] Greene, Brian, Das elegante Universum, a.a.O. S. 278; oben 4.1

Der Verfasser

Gerhard Pfreundschuh, geb. 1941 in Heidelberg, studierte Geschichte, Recht und Wirtschaft (1. juristische Staatsprüfung in München, 2. in Stuttgart, Dipl.-Volkswirt in Mannheim). Mit einem verfassungsgeschichtlichen Thema promovierte er bei Roman Herzog zum Doktor der Verwaltungswissenschaften (Dr. rer. publ.) in Speyer („Entstehung und Merkmale des frühen Rechtsstaats“).

Nach Wehrdienst (Major d.R.) und Studium trat er in die Innenverwaltung Baden-Württemberg ein. Danach war er Erster Bürgermeister in Wertheim und von 1981 bis 1997 Landrat des Neckar-Odenwald-Kreises in Mosbach/Baden. Von 1998 bis 2008 war er in Heidelberg Leiter des Steinbeis-Transferzentrums Kommunales Management der Steinbeis-Stiftung Baden-Württemberg. Schwerpunkt war die Untersuchung öffentlicher Sozialer Hilfen in Kommunen und Ländern. Dazu wurde der Lehrgang „Fachanwalt Sozialrecht“ erfolgreich abgeschlossen.

Er ist seit 1966 mit Birgit, geb. Kellmann, verheiratet. Sie haben vier Kinder.